

Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die gegeben ist durch

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1-z^3}{1-z}, & z \neq 1, \\ \alpha, & z = 1. \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die Konstante α so, dass F auf ganz \mathbb{C} stetig ist. (In den folgenden Aufgabenteilen soll α dann stets diesen Wert haben.)
- Berechnen Sie die Nullstellen von F . Geben Sie für jede Nullstelle den Betrag und das Argument an. Welche Ordnung haben die Nullstellen?
- Schreiben Sie $F(z)$ in der Form $F(z) = (z - z_1)(z - z_2)$ und berechnen Sie Zahlen a und b , so dass gilt:

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}.$$

- Entwickeln Sie die Funktion $1/F$ in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$. Geben Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Betrachten Sie in \mathbb{R}^3 den Punkt $A = (4, -3, 1)$ und die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Begründen Sie, dass A nicht auf g liegt, und bestimmen Sie die Hessesche Normalform derjenigen Ebene E , in der A und g liegen.
- Welchen Abstand hat der Punkt $B = (3, -4, 5)$ von der Ebene E ?
- Mit K bezeichnen wir nun die Kugel mit Mittelpunkt B , auf deren Oberfläche der Punkt A liegt. Welchen Radius hat der Kreis, der sich als Schnitt von K und E ergibt?
- Wie lang ist das Stück von g , das innerhalb der Kugel K liegt?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

- Wo ist f stetig? Wo ist f differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antworten, und berechnen Sie $f'(x)$ für alle Stellen x , an denen die Ableitung existiert.
- Berechnen Sie alle lokalen Minima und Maxima von f , soweit diese vorhanden sind. Bestimmen Sie auch die zugehörigen x -Werte.
- Wo hat die Funktion f globale Minima und Maxima? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

- Geben Sie eine Stammfunktion von $f(x) = xe^{-2x^2}$ an, und bestimmen Sie alle Stammfunktionen von $g(x) = x^3e^{-2x^2}$.

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Zahlen a_n und b_n gegeben durch

$$a_n := \int_{n-1}^n \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx, \quad b_n := \int_{n-1}^{n+1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Berechnen Sie a_n und b_n für jedes $n \in \mathbb{N}$, und bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen (a_n) und (b_n) , falls diese konvergieren.

- Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent? Begründen Sie Ihre Antworten.

Nach der Klausur

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, den 19. April, vor dem Sekretariat aus und können auch im Internet abgerufen werden:

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html>

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Mittwoch, dem 3. Mai, von 13.10 bis 13.45 Uhr im S 31 statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben. Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 8. bis 11. Mai.