UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Frühjahr 2000
17.4.2000

Lösung zur Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1

a) Auf $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ ist F offenbar stetig. Für $z\neq 1$ gilt

$$F(z)=\frac{1-z^3}{1-z}=\frac{(1+z+z^2)(1-z)}{1-z}=1+z+z^2\,,$$

und hieraus ergibt sich für $z\to 1$ sofort $F(z)\to 1+1+1^2=3$. Wir müssen folglich $\alpha=3$ wählen, damit F auch an der Stelle $z=1$ stetig ist. Die Funktion F lässt sich dann auf ganz $\mathbb{C}$ darstellen in der Form $F(z)=1+z+z^2$.

b) Die Nullstellen von $F(z)=z^2+z+1=(z+\frac12)^2+\frac34$ sind

$$z_1=-\tfrac12+\tfrac12\sqrt3\,i\qquad\text{und}\qquad z_2=-\tfrac12-\tfrac12\sqrt3\,i\,.$$

Es gilt $|z_{1,2}|^2=(\frac12)^2+(\pm\frac12\sqrt3)^2=1$. Beide Nullstellen haben also Betrag 1; weiter ist $\arg z_1=2\pi/3$ und $\arg z_2=4\pi/3$, denn es gilt $\cos(2\pi/3)=\cos(4\pi/3)=-\frac12$ und $\sin(2\pi/3)=\frac12\sqrt3$ sowie $\sin(4\pi/3)=-\frac12\sqrt3$.
Wegen $F(z)=(z-z_1)(z-z_2)$ und $z_1\neq z_2$ haben beide Nullstellen die Ordnung 1.

c) Multiplizieren wir die Gleichung mit $F(z)=(z-z_1)(z-z_2)$, so ergibt sich

$$1=a(z-z_2)+b(z-z_1)=(a+b)z-(az_2+bz_1)\,.$$

Folglich muss $a+b=0$ gelten, d. h. $a=-b$, und $az_2+bz_1=-1$, also $b(z_1-z_2)=-1$. Wegen $z_1-z_2=\sqrt3\,i$ folgt

$$b=\frac{-1}{\sqrt3\,i}=\frac{i}{\sqrt3}=\tfrac13\sqrt3\,i\,,\qquad\text{und damit}\qquad a=-\tfrac13\sqrt3\,i\,.$$

d) Für $|z/z_1|<1$, also $|z|<|z_1|=1$, gilt

$$\frac{a}{z-z_1}=\frac{-a/z_1}{1-z/z_1}=-\frac{a}{z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{z_1}\Big)^n=-a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z_1^{n+1}}z^n=-a\sum_{n=0}^{\infty}(\overline{z_1})^{n+1}z^n,$$

wobei der letzte Schritt wegen $z_1\overline{z_1}=|z_1|^2=1$, also $1/z_1=\overline{z_1}$ gerechtfertigt ist. Entsprechendes gilt für b und z_2. Also hat $1/F(z)$ die Potenzreihenentwicklung

$$-a\sum_{n=0}^{\infty}(\overline{z_1})^{n+1}z^n-b\sum_{n=0}^{\infty}(\overline{z_2})^{n+1}z^n=\tfrac13\sqrt3\,i\sum_{n=0}^{\infty}\big((-\tfrac12-\tfrac12\sqrt3\,i)^{n+1}-(-\tfrac12+\tfrac12\sqrt3\,i)^{n+1}\big)z^n$$

für $|z|<1$. Der Konvergenzradius r dieser Potenzreihe kann nicht größer als 1 sein, denn es gilt ja $|1/F(z)|\to\infty$ für $z\to z_1$ und $|z_1|=1$. Folglich ist $r=1$.

Zusatzüberlegung (nicht verlangt): Man kann $b_n:=(-\frac12-\frac12\sqrt3\,i)^{n+1}-(-\frac12+\frac12\sqrt3\,i)^{n+1}$ noch weiter ausrechnen: Es ergibt sich $b_{3n}=-\sqrt3\,i$ und $b_{3n+1}=\sqrt3\,i$ sowie $b_{3n+2}=0$. Also: $1/F(z)=1-z+z^3-z^4+z^6-z^7+-\cdots$. (Dies hätte man auch direkt aus $1/F(z)=(1-z)/(1-z^3)=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}z^{3n}$ ablesen können.)

Aufgabe 2

a) Läge A auf g, so müsste $(6+4t,-1+t,2-t)=(4,-3,1)$ für ein gewisses $t\in\mathbb{R}$ gelten. Wegen der ersten Koordinate hieße dies $t=-\frac12$, wegen der zweiten aber $t=-2$. Es gibt folglich kein solches t, und damit liegt A nicht auf g.

Die Ebene E wird aufgespannt von den Vektoren

$$\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad\begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor der Ebene ist daher

$$\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(-2)\\-2-4\\8-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}=:\vec n\,.$$

Also lässt sich die Ebene E durch die Gleichung $\vec x\cdot\vec n=\alpha$, mit einem gewissen $\alpha\in\mathbb{R}$, darstellen. Einsetzen von A liefert $\alpha=4\cdot3+(-3)\cdot(-6)+1\cdot6=36$. Die rechte Seite ist somit bereits positiv; um die Hessesche Normalform zu erhalten, müssen wir die Gleichung nur noch durch $\|\vec n\|=\sqrt{3^2+(-6)^2+6^2}=\sqrt{81}=9$ dividieren:

$$E\ :\ \vec x\cdot\frac13\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=4\,.$$

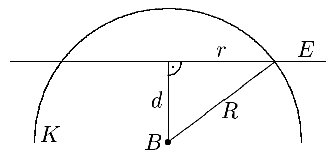
b) Der Punkt B hat von E den Abstand

$$d=\left|\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}\cdot\frac13\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}-4\right|=\left|\frac{3+8+10}{3}-4\right|=3\,.$$

c) Der Radius R der Kugel ist gerade der Abstand der beiden Punkte A und B, also $R=\|\overrightarrow{AB}\|$. Mit

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

ergibt sich $R=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{18}$.



Für den Radius r des Schnittkreises gilt nach dem Satz des Pythagoras $r^2+d^2=R^2$ (siehe Skizze), also $r^2=R^2-d^2=18-9=9$. Der Schnittkreisradius ist somit $r=3$.

d) Wir suchen die Punkte, in denen g die Kugeloberfläche durchstößt: Dazu müssen wir die Punkte auf g finden, die von B den Abstand R haben, d. h. wir suchen $t \in \mathbb{R}$ mit

$$R = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OB} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3+4t \\ 3+t \\ -3-t \end{pmatrix} \right\|$$
$$= \sqrt{(3+4t)^2 + 2(3+t)^2} = \sqrt{18t^2 + 36t + 27}\,.$$

Es muss also $18t^2 + 36t + 27 = R^2 = 18$ gelten, d. h. $2t^2 + 4t + 1 = 0$. Dies liefert die zwei Lösungen $t_{1,2} = \frac{1}{4}(-4 \pm \sqrt{16-8})$, also $t_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Zwischen den zugehörigen Punkten P_1 und P_2 verläuft die Gerade im Inneren von K. Es gilt

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat die Länge $\sqrt{2} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$.

Aufgabe 3

a) Als Verkettung stetiger Funktionen ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Die Funktion lässt sich darstellen als

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1}, & x \leqslant 0, \\ xe^{x-1}, & 0 < x < 1, \\ xe^{1-x}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist f also differenzierbar. Dort gilt

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{x-1} - xe^{x-1} = -(x+1)e^{x-1}, & x < 0, \\ e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}, & 0 < x < 1, \\ e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}, & x > 1. \end{cases}$$

Jetzt müssen wir noch die Differenzierbarkeit an den Stellen 0 und 1 untersuchen. Wegen

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-xe^{x-1}}{x} = \lim_{x \to 0-} -e^{x-1} = -e^{-1}$$

und

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{xe^{x-1}}{x} = \lim_{x \to 0+} e^{x-1} = e^{-1} \neq -e^{-1}$$

ist f an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Auch an der Stelle 1 ist die Funktion nicht differenzierbar, denn nach der Regel von de l'Hospital gilt

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} f'(x) = 2 \neq 0 = \lim_{x \to 1+} f'(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

b) Extremwertverdächtig sind die Stellen, an denen f nicht differenzierbar ist, also 0 und 1, sowie alle Punkte aus $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, in denen $f'(x) = 0$ gilt. Letzteres ist nur für $x = -1$ der Fall; somit haben wir drei verdächtige Stellen: -1, 0 und 1.

An der Stelle -1 wechselt das Vorzeichen der Ableitung von $+$ nach $-$; also wird in $x = -1$ das lokale Maximum $f(-1) = e^{-2}$ angenommen. Wegen $f(0) = 0$ und $f(x) \geqslant 0$ für alle x ist $x = 0$ Stelle eines lokalen (ja sogar eines globalen) Minimums mit Wert $f(0) = 0$. Auch in $x = 1$ liegt ein lokales Maximum vor (mit Wert $f(1) = 1$), denn f ist dort stetig und es gilt $f'(x) > 0$ für $x \in (0,1)$ und $f'(x) < 0$ für $x > 1$.

c) Nur die Stellen lokaler Extremwerte kommen hier in Frage. In $x = 0$ liegt ein globales Minimum vor, wie wir eben schon festgestellt hatten. Wegen $f(-1) < f(1)$ haben wir in -1 kein globales Maximum; $x = 1$ dagegen ist Stelle eines globalen Maximums, denn als stetige, nichtnegative Funktion mit $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$ muss f ein solches besitzen. (Man könnte auch sagen: Die „Randwerte" bei $-\infty$ und ∞ sind kleiner als $f(1)$.)

Aufgabe 4

a) Offensichtlich ist

$$F(x) := -\tfrac{1}{4}e^{-2x^2}$$

eine Stammfunktion von f. Folglich liefert Produktintegration

$$\int^x t^3 e^{-2t^2}\,dt = \int^x t^2 f(t)\,dt = x^2 F(x) - \int^x 2tF(t)\,dt = x^2F(x) + \tfrac{1}{2}\int^x te^{-2t^2}\,dt$$
$$= x^2F(x) + \tfrac{1}{2}F(x) = -\tfrac{1}{4}(x^2 + \tfrac{1}{2})e^{-2x^2}\,.$$

Alle Stammfunktionen von g erhält man also in der Form $G(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + \frac{1}{2})e^{-2x^2} + C$ mit einer beliebigen Konstante C.

b) Es gilt

$$a_n = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \sqrt{2x+3}\,\Big|_{x=n-1}^{n} = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}$$
$$= \frac{2n+3-(2n+1)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}} = \frac{2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

und

$$b_n = \int_{n-1}^{n+1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,\Big|_{x=n-1}^{n+1} = \sqrt{1+(n+1)^2} - \sqrt{1+(n-1)^2}$$
$$= \frac{1+(n+1)^2 - (1+(n-1)^2)}{\sqrt{1+(n+1)^2} + \sqrt{1+(n-1)^2}} = \frac{4n}{\sqrt{1+(n+1)^2} + \sqrt{1+(n-1)^2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{1/n^2 + (1+1/n)^2} + \sqrt{1/n^2 + (1-1/n)^2}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{4}{1+1} = 2\,.$$

c) Die Reihe über b_n konvergiert nicht, denn die dafür notwendige Voraussetzung $b_n \to 0$ ist nicht erfüllt. Aber auch die Reihe über a_n ist nicht konvergent. Wegen

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{9n} + \sqrt{9n}} = \frac{1/3}{\sqrt{n}}$$

und der Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ folgt dies aus dem Minorantenkriterium.