Lösungsvorschläge zur Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1

a) $z = \frac{9-7i}{1-3i} = \frac{9-7i}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{30+20i}{10} = 3+2i$.

b) $g(z) = (z^2-1)^2 + 1 = 0 \iff (z^2-1)^2 = -1 \iff z^2 - 1 = \pm i \iff z^2 = 1 \pm i$.

Erster Fall: $z^2 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{\pi}{4}))$, $\frac{\pi}{4} = 45°$.

Verwende Polarkoordinaten $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Einsetzen ergibt unter Verwendung der Formel von de Moivre

$z^2 = \left|z^2\right| \cdot (\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))^2 = |z|^2 \cdot (\cos(2\varphi) + i\,\sin(2\varphi))$.

Also erhält man $|z|^2 = \sqrt{2}$, also $|z| = \sqrt[4]{2}$, und $2\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, also $\varphi = \frac{\pi}{8}$ (Fall: $k = 0$) oder $\varphi = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$ (Fall: $k = 1$). Damit ergeben sich in diesem Fall die beiden folgenden Lösungen der Gleichung $g(z) = 0$ zu $z_1 = \sqrt[4]{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{8}) + i\,\sin(\frac{\pi}{8}))$ und $z_2 = \sqrt[4]{2} \cdot (\cos(\frac{9\pi}{8}) + i\,\sin(\frac{9\pi}{8}))$.

Zweiter Fall: $z^2 = 1 - i = \sqrt{2} \cdot (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{7\pi}{4}))$.

Verwende Polarkoordinaten $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Einsetzen ergibt unter Verwendung der Formel von de Moivre

$z^2 = \left|z^2\right| \cdot (\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))^2 = |z|^2 \cdot (\cos(2\varphi) + i\,\sin(2\varphi))$.

Also erhält man $|z|^2 = \sqrt{2}$, also $|z| = \sqrt[4]{2}$ und $2\varphi = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, also $\varphi = \frac{7\pi}{8}$ (Fall: $k = 0$) oder $\varphi = \frac{7\pi}{8} + \pi = \frac{15\pi}{8}$ (Fall: $k = 1$).

Damit ergeben sich in diesem Fall die beiden folgenden Lösungen der Gleichung $g(z) = 0$ zu $z_3 = \sqrt[4]{2} \cdot (\cos(\frac{7\pi}{8}) + i\,\sin(\frac{7\pi}{8}))$ und $z_4 = \sqrt[4]{2} \cdot (\cos(\frac{15\pi}{8}) + i\,\sin(\frac{15\pi}{8}))$.

c) Für $z \neq 0$ gilt $f(z) = \frac{2z+1}{z} = \frac{2z+1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{2z\bar{z}+\bar{z}}{z\bar{z}}$. Damit folgt $f(K_1) = \{2 + \bar{z} \mid |z| = z\bar{z} = 1\}$. Letzteres ist ein Kreis um den Punkt $z_0 = 2$ vom Radius $r = 1$.

Alternativ setzen wir einfach alle Punkte der Einheitskreislinie ein: sie haben die Gestalt $z = e^{i\varphi}$, und es ist $f(z) = 2(e^{i\varphi} + 1) \cdot e^{-i\varphi} = 2 + e^{-i\varphi}$. Diese Punkte bilden wieder eine Kreislinie um den Punkt $z_0 = 2$ vom Radius $r = 1$.

Aufgabe 2

a) $$a_n = \frac{\binom{n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n^2}{2}}{n+3} = \begin{cases} \frac{\frac{n\cdot(n-1)}{2} + \frac{n^2}{2}}{n+3} = \frac{n^2 - \frac{n}{2}}{n+3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{\frac{n\cdot(n-1)}{2} - \frac{n^2}{2}}{n+3} = \frac{-\frac{n}{2}}{n+3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Folge konvergiert nicht und hat den (reellen) Häufungspunkt $-\frac{1}{2}$.

b) $$b_n = (1 - \tfrac{1}{n})^n \cdot \sin\tfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, & \text{falls } n = 4k \\ (1 - \frac{1}{n})^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}, & \text{falls } n = 4k+1 \\ 0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, & \text{falls } n = 4k+2 \\ (1 - \frac{1}{n})^n \cdot (-1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -e^{-1}, & \text{falls } n = 4k+3 \end{cases} \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Folge konvergiert daher nicht und hat die Häufungspunkte $0, \frac{1}{e}, -\frac{1}{e}$.

c) Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zwischenstelle ξ_n mit

$$f(2 + \frac{1}{n}) - f(2) = f'(\xi_n) \cdot (2 + \frac{1}{n} - 2) = \frac{1}{n} \cdot f'(\xi_n),\ 2 \leqslant \xi_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}$$

Weiter gilt $f'(x) = -2x \cdot e^{4-x^2} \overset{x\to 2}{\longrightarrow} -4$. Es folgt die Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot (f(2 + \frac{1}{n}) - f(2)) = \lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = \lim_{x\to 2} f'(x) = -4.$$

Aufgabe 3

Wir erkennen, dass die vorgelegte Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{\frac{1}{4}}{n} x^n$ die Ableitung der Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{4}}{n} x^{n+1}$ ist, die den Konvergenzradius 1 hat und den Wert $f(x) = x(1+x)^{\frac{1}{4}}$ für $|x| < 1$ besitzt. Die vorgelegte Potenzreihe hat daher ebenfalls den Konvergenzradius 1 und für $|x| < 1$ den Wert $f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}x(1+x)^{-\frac{3}{4}} = \frac{5x+4}{4(1+x)^{\frac{3}{4}}}$.

Der Konvergenzradius hätte durchaus auch mit Quotienten bestimmt werden können:

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+2)\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})(-\frac{5}{4})\cdots(\frac{1}{4}-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})\cdots(\frac{1}{4}-(n-1))}\right| = \left|\frac{(n+2)(\frac{1}{4}-n)}{(n+1)^2}\right| = \frac{(1+\frac{2}{n})(1-\frac{1}{4n})}{(1+\frac{1}{n})^2}$, was für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 4

Nachdem wir den Nenner von f_α als $(x+1)^2(x-1)^2$ schreiben, setzen wir eine Partialbruchzerlegung von f_α an:

$$f_\alpha(x) = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

mit reellen A, B, C, D. Bis auf eine additive Konstante hat die Stammfunktion von f_α dann die Gestalt

$$F_\alpha(x) = -\frac{A}{x+1} + B\ln|x+1| - \frac{C}{x-1} + D\ln|x-1|$$

Soll F_α eine rationale Funktion sein, so muss $B = D = 0$ sein. Mithin hat f_α die Gestalt

$$f_\alpha(x) = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{(A+C)x^2 + 2(C-A)x + A + C}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

Der vorgegebene Zähler von f_α aber ist das Polynom $x^2 - (2+\alpha)x + 2\alpha$. Koeffizientenvergleich liefert also das LGS

$$A + C = 1, \quad A + C = 2\alpha, \quad 2(C - A) = -(2+\alpha)$$

Die ersten zwei Gleichungen ergeben $\alpha = \frac{1}{2}$. Die verbleibenden Gleichungen

$$A + C = 1, \quad A - C = \frac{5}{4}$$

haben die Lösung $A = \frac{9}{8}$, $C = -\frac{1}{8}$. Es folgt, dass einzig

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

eine rationale Stammfunktion hat. Diese lautet bis auf eine additive Konstante

$$F_{\frac{1}{2}}(x) = -\frac{9}{8} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-1}$$