UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

14.03.2002
Frühjahr 2002

DIPLOM–VORPRÜFUNG

zur Höheren Mathematik für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1. KLAUSUR

1. Aufgabe (10 Punkte):

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte

$$P_1(2|1|2) \quad \text{und} \quad P_2(1|1|1)$$

sowie die von einem reellen Parameter c abhängige Gerade

$$g_c \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ c-1 \\ 2c^2-1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

gegeben.

a) Berechnen Sie alle $c \in \mathbb{R}$, so daß P_1, P_2 und die Gerade g_c in einer Ebene liegen.

b) Sei h die Gerade durch P_1 und P_2. Bestimmen Sie für die in Aufgabenteil a) berechneten Werte c sowie zusätzlich für $c = 0$ jeweils den Abstand der Geraden g_c von h.

c) Für welches $c \in \mathbb{R}$ hat das Dreieck $\triangle P_1P_2Q$ für jedes $Q \in g_c$ den gleichen Flächeninhalt? Begründen Sie Ihre Antwort, und geben Sie den Wert dieses Flächeninhalts an.

2. Aufgabe (10 Punkte):

a) Es sei $R > 1$ und $z(t) = Re^{it} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Mit $\quad f(z) := \dfrac{e^z}{1-z} \quad (z \in \mathbb{C}\,,\, z \neq 1) \quad$ ist

$$g(t) := |f\,(z(t))| \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$$

zu betrachten.

Berechnen Sie $\displaystyle\max_{\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}} g(t)$ und $\displaystyle\min_{\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}} g(t)$.

b) Entwickeln Sie $f(z)$ in eine Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Geben Sie zur Berechnung der Koeffizienten c_k eine Formel an.

Berechnen Sie c_0, c_1, c_2, c_3.

– bitte wenden –

3. Aufgabe (10 Punkte):

a) Zeigen Sie:
Es gilt für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{k} = \left[(n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx\right]^{-1}.$$

Hinweis: Induktion nach k.

b) Begründen Sie, ohne a) zu verwenden, daß

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx = \int_0^1 x^{n-k}(1-x)^k\,dx$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt.

4. Aufgabe (10 Punkte):

Für $x \geq 0$ sei das uneigentliche Integral

$$I_\alpha(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t^\alpha}\,dt \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

gegeben.

a) Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, so daß $I_\alpha(x)$ existiert. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Besitzt I_α lokale Extremstellen? Geben Sie gegebenenfalls deren Art und Lage an.

c) Für welche der in a) bestimmten α existiert $\lim\limits_{x\to\infty} I_\alpha(x)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Sei nun $\alpha = 2$. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} I_2(x)$.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, daß $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ gilt.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, dem 27. März, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 16. April, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 22. bis 26. April.