Lösung zur 1. Klausur (VD) im Frühjahr 2002

① $P_1(2,1,2)$, $P_2(1,1,1)$

Gerade: $g_c: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\c-1\\2c^2-1\end{pmatrix}$ $\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

a) P_1, P_2, g_c liegen in einer Ebene, wenn die Vektoren

$$\vec a = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}, \quad \vec b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec c = \begin{pmatrix}1\\c-1\\2c^2-1\end{pmatrix}$$

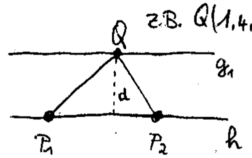
linear abhängig sind, d.h. wenn gilt

$$0 = (\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = \left(\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}\right)\cdot \begin{pmatrix}1\\c-1\\2c^2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+3\\0\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\c-1\\2c^2-1\end{pmatrix} = 3-6c^2+3$$

$$= 6(1-c^2) \iff \boxed{c=\pm 1}$$

b) Gerade $h: \vec x = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

z.B. $Q(1,4,1)$



(i) $g_1: \vec x = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

D.h. g_1 und h sind parallel. Der Abstand d zweier paralleler Geraden kann mit Hilfe der Dreiecksfläche A berechnet werden:

$$A = \frac12 \overline{P_1P_2}\cdot d = \left\|\frac12\left(\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1Q}\right)\right\| = \frac12\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}\right\| = \frac12\left\|\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}\right\| = \frac12\sqrt{18} = \frac{3}{\sqrt2}$$

$$\Longrightarrow d = \frac{\sqrt2\cdot 3}{\overline{P_1P_2}} = \frac{\sqrt2\cdot3}{\|\vec{P_2}-\vec{P_1}\|} = \frac{\sqrt2\cdot 3}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\sqrt2\cdot3}{\sqrt2} = \underline{\underline{3}}$$

(ii) $g_{-1}: \vec x = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

D.h. g_{-1} und h sind nicht parallel, liegen aber in einer Ebene ⇒ die Geraden schneiden sich, d.h. der Abstand d zwischen beiden ist $\underline{\underline{d=0}}$

(iii) $g_0: \vec x = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

g_0 und h liegen nicht in einer Ebene ⇒ sie sind windschief:

Abstand windschiefer Geraden: $d = \left|\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right)\cdot \vec{n_0}\right|$ mit $\vec{n_0} = \frac{\vec n}{\|\vec n\|}$ wobei $\vec n = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec n\| = \sqrt6$$

Also: $d = \left|\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{6}{\sqrt6} = \underline{\underline{\sqrt6}}$

c) Vgl. Teil b) (Skizze):

Dreiecksfläche: $A = \frac12 \overline{P_1P_2}\cdot d$, wobei d der Abstand des Punktes Q von der Geraden h durch P_1 und P_2 ist. Somit kann A nur dann für alle $Q\in g_c$ gleich sein, wenn der Abstand d unabhängig von der Lage von Q auf g_c ist, d.h. g_c muß parallel zu h liegen, was nach unseren Überlegungen aus b) für $c=1$ der Fall ist. Für d. Wert d. Flächeninhalts ergibt sich:

$$A = \frac12 \overline{P_1P_2}\cdot d = \dots = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt2}}}$$

② $f(z) = \frac{e^z}{1-z} \Rightarrow |f(z)|^2 = \frac{e^z\cdot e^{\bar z}}{(1-z)(1-\bar z)} = \frac{e^{z+\bar z}}{1-z-\bar z+z\bar z} = \frac{e^{2\mathrm{Re}\,z}}{1-2\mathrm{Re}\,z+|z|^2}$

Parametrisierung: $z(t) = Re^{it} = R(\cos t + i\sin t) \Rightarrow \mathrm{Re}\,z = R\cos t$

$R>1,\ t\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}] = I$ $\qquad |z|^2 = R^2$

Somit: $g(t) = |f(Re^{it})| = \sqrt{\frac{e^{2R\cos t}}{1-2R\cos t+R^2}} \in C^1 \ \forall t$

Suche stationäre Stellen, d.h. $g'(t)=0$:

$$0 \overset{!}{=} g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{\dots}}\cdot\frac{\left(-2R\sin t\cdot(1-2R\cos t+R^2)+2R\sin t\right)e^{2R\cos t}}{(1-2R\cos t+R^2)^2}$$

$$\iff 2R\sin t\left(\cancel{1}-\cancel{1}+2R\cos t-R^2\right) = 0$$

$$\iff \sin t = 0 \ \lor\ \underbrace{2\cos t - R}_{<0,\ \text{da}\ \cos t\le 0\ \text{f.}\ t\in I} = 0$$

$$\iff t = \pi \in I$$

Dort hat $g'(t)$ einen Vorzeichenwechsel von − nach + d.h. es liegt ein Minimum vor:

$$\underline{\underline{\min_{t\in I} g(t) = g(\pi) = \frac{e^{-R}}{1+R}}}$$

Da I ein kompaktes Intervall ist, gibt es auch $\max_{t\in I} g(t)$.

$\Longrightarrow$

Randwerte prüfen:

$$g\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = g\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} = \max_{t\in I} g(t)$$

Alternativ (schneller):

Nutze aus, daß gilt $\min_{t\in I} \cos t = -1$, $\max_{t\in I} \cos t = 0$

so daß:

$$\underset{\text{s.o.}}{\dots} = \sqrt{\frac{e^{-2R}}{1+2R+R^2}} \leq g(t) \leq \sqrt{\frac{e^{2R\cdot 0}}{1-2R\cdot 0+R^2}} = \dots \text{ s.o.}$$

b)

Exponential- und Geom. Reihe ($|z|<1$)

$$f(z) = e^z \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!} z^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \cdot z^k$$

Cauchy-Produkt, da Pot.reihen absol. konv. (innerhalb d. K.-radius)

d.h. $\underline{\underline{c_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}}}$ $\Rightarrow$ $c_0 = 1$, $c_1 = 1+1 = 2$, $c_2 = 1+1+\frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$, $c_3 = \frac{5}{2}+\frac{1}{6} = \frac{8}{3}$

③

a) Für $k = 0,1,2,\dots n$, $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \left[(n+1)\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx\right]^{-1}$$

Bew. durch vollst. Induktion:

Ind. Anf. ($k=0$): $\binom{n}{0} = 1 \overset{!}{=} \left[(n+1)\int_0^1 (1-x)^n\,dx\right]^{-1} = \left[-(1-x)^{n+1}\Big|_0^1\right]^{-1} = [-0+1]^{-1} = 1$ ok $\forall n\in\mathbb{N}$

Ind. Vorauss.: $\binom{n}{k} = \left[(n+1)\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx\right]^{-1}$ gelte für ein $k\in[0,n-1]$

Ind. Schluß: $k \rightsquigarrow k+1$

$$\binom{n}{k+1} \overset{!}{=} \left[(n+1)\int_0^1 \underset{u}{x^{k+1}} \underset{v'}{(1-x)^{n-k-1}}\,dx\right]^{-1} =$$

part. Integr.

$$= \Big[\underbrace{(n+1)\left(x^{k+1}\frac{-1}{n-k}(1-x)^{n-k}\right)\Big|_0^1}_{=0-0=0} - (n+1)\int_0^1 (k+1)x^k \cdot \frac{-1}{n-k}(1-x)^{n-k}\,dx\Big]^{-1}$$

Ind. Vorauss.

$$= \left[\frac{k+1}{n-k}\right]^{-1} \cdot \left[(n+1)\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx\right]^{-1} = \frac{n-k}{k+1}\cdot\binom{n}{k} = \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{n!}{(n-k)!\,k!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} = \binom{n}{k+1} \quad \text{stimmt}$$

b)

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx = \int_1^0 (1-y)^k y^{n-k}\cdot(-1)\,dy = \int_0^1 (1-y)^k y^{n-k}\,dy =$$

Subst: $1-x =: y$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$ Umbenenng: $y \to x$

$$= \int_0^1 (1-x)^k x^{n-k}\,dx \quad \text{stimmt.}$$

④ $I_\alpha(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t^\alpha}\,dt$, $\alpha\in\mathbb{R}$

a) Betrachte Integranden bei 0:

$$\lim_{t\to 0}(t-1)e^{-t^\alpha} = \lim_{t\to 0}\frac{t-1}{e^{t^\alpha}} = (*)$$

1. Fall: $\alpha > 0$

$$(*) = \frac{0-1}{e^0} = -1$$

2. Fall: $\alpha = 0$

$$(*) = \frac{0-1}{e} = \frac{-1}{e}$$

3. Fall: $\alpha < 0$

$$(*) = \lim_{t\to 0}\frac{t-1}{e^{t^\alpha}} = 0 \quad \text{da } \lim e^{t^\alpha} \xrightarrow[\text{falls } \alpha<0]{t\to 0} \infty$$

D.h. der Integrand kann für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ stetig ergänzt werden $\Longrightarrow$ $I_\alpha(x)$ existiert für alle $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) Gesucht sind lok. Extr., d.h. untersuche I_α auf stationäre Stellen und betrachte den Randpunkt $x=0$.

- $I_\alpha'(x) = (x-1)e^{-x^\alpha} \overset{!}{=} 0 \iff x = 1$ wobei $I_\alpha'(x)$ dort einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat $\Rightarrow$ Minimum bei $x=1$
- Rand $x=0$: Da I_α in $(0,1)$ st. monoton fallend ist, liegt in $x=0$ ein Maximum vor.

c) Betrachte das Verhalten des Integranden für $x\to\infty$:

1. Fall: $\boxed{\alpha > 0}$

$$0 \leq (t-1)\cdot e^{-t^\alpha} \underset{t \geq 1}{\leq} t \cdot e^{-t^\alpha} = \frac{t}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n}}{n!}} = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n - 1}}{n!}} \leq \frac{k!}{t^{\alpha k - 1}} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Ist nun $\alpha k - 1 > 1$ bzw. $k > \frac{2}{\alpha}$, was für jedes $\alpha > 0$ mit $k \in \mathbb{N}$ erreichbar ist, so konvergiert $\int\limits_1^\infty \frac{1}{t^{\alpha k - 1}}\, dt$. Mit dem Majoranten-Kriterium folgt dann, daß auch $\lim\limits_{x \to \infty} I_\alpha(x)$ existiert (falls $\alpha > 0$).

2. Fall $\boxed{\alpha = 0}$

$I_0(x) = \int\limits_0^\infty (t-1)\cdot e^{-1}\, dt$ existiert nicht.

3. Fall: $\boxed{\alpha < 0}$

$$(t-1)\, e^{-t^\alpha} \underset{t \geq 1}{\geq} (t-1)\cdot e^{-1} \geq 0$$

$t \geq 1$, Monotoniebetrachtung: t^α monoton fallend $\Rightarrow -t^\alpha$ monoton wachsend $\Rightarrow e^{-t^\alpha}$ monoton wachsend $\Rightarrow$ Im für uns interessanten Bereich $t \geq 1$ gilt: $e^{-t^\alpha} \geq e^{-1}$

$\Rightarrow$ Damit haben wir eine divergente Minorante gefunden (vgl. 2. Fall), d.h. $\lim\limits_{x \to \infty} I_\alpha(x)$ existiert für $\alpha < 0$ nicht.

d) existiert nach c), da $\alpha = 2 > 0$

$$I_2(x) = \int\limits_0^x (t-1)\cdot e^{-t^2}\, dt = \int\limits_0^x t\, e^{-t^2}\, dt - \int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-t^2}\Big|_0^x - \int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x^2}\right) - \int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt$$

$$\xrightarrow{x \to \infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{\pi})}}$$