

**Diplom-Vorprüfung**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen**  
**Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

- a) Bestimme alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^6 + \frac{i}{64} = 0.$$

- b) Berechne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan x}{1 - \cos x}.$$

- c) Betrachte

$$f(x) = \frac{x^3}{1 + x^2}.$$

Wie lautet die Taylorreihe zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ ? Bestimme den Konvergenzradius.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Betrachte die zwei Geraden

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

und

$$g_2 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestimme den Schnittpunkt und den Cosinus des Winkels, unter dem sich die Geraden schneiden.  
 b) Bestimme den minimalen Abstand des Ursprungs von der durch  $g_1$  und  $g_2$  aufgespannten Ebene  $E_1$ .  
 c) Bestimme den Schnittwinkel, unter dem sich die Gerade

$$g_3 : x = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}$$

und  $E_1$  schneiden.

- d) Betrachte die zu  $E_1$  parallele Ebene  $E_2$  durch den Ursprung. Bestimme einen orthogonalen Vektor  $e_2$  in  $E_2$  zu  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $\|e_2\| = 1$ .

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}.$$

- a) Bestimme die Nullstellen von  $f$  und die  $x$ -Werte möglicher Extremstellen.  
 b) Bestimme  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f'(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 f'(x)$ . Skizziere den Graph der Funktion  $f$ .  
 c) Bestimme eine Stammfunktion von  $f$ .  
 d) Welche Fläche schließen die Funktion  $f$ , die Gerade  $x = 3$  und die Gerade  $y = 1$  ein?

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**

- a) Betrachte die Rekursion

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + 4n + 1}{n^3 + 8} a_n, (n \in \mathbb{N})$$

mit  $a_1 = 1$ . Berechne  $a_2$  und  $a_3$  und bestimme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

- b) Betrachte

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

mit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus Teilaufgabe a). Bestimme den Konvergenzradius der unendlichen Reihe. Bestimme  $f^{(3)}(0)$ .

- c) Ist  $f(x)$  achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse? Bestimme alle Polstellen von  $f$ . (Begründung).  
 d) Bestimme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\arctan x}.$$

- e) Bestimme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy.$$

**Viel Erfolg!**

**Hinweise für nach der Klausur:**

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Donnerstag, den 10. April 2003, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

<http://ww.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html>

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, den 29. April 2003, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S31 (Mathematikgebäude) statt.

Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 0. bis 09. Mai 2003.