UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Frühjahr 2003
25.03.2003

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
— L ö s u n g e n —

Aufgabe 1

a) $z^6 = \frac{1}{64}(-i) = \frac{1}{64}e^{\frac{3\pi}{2}i} = \frac{1}{64}e^{(\frac{3\pi}{2}+2\pi m)i}$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Es folgt $z_j = \frac{1}{2}e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}j)i}$ für $j = 0, \ldots, 5$

b) Es ist $\arctan x = x + 0(x^3)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + 0(x^4)$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x\arctan x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+0(x^3))}{1-1+\frac{x^2}{2}+0(x^4)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+0(x^2)}{\frac{1}{2}+0(x^2)}\right) = 2$$

bzw. mit Satz von l'Hospital.

c)

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2} = x^3\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+3}$$

Konvergenzradius wie geometrische Reihe, d.h. $|x^2| < 1$, d.h. $|x| < 1$, d.h. $R = 1$.

Aufgabe 2

a) Schnitt

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

wird gelöst durch $\lambda = 1, \mu = 0$, d.h.
Schnittpunkt $(1, 2, 1)$

Schnittwinkel

$$\cos\varphi = \frac{\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle}{\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\|\,\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) $E_1 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Einheitsnormalenvektor: $n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ Hessesche Normalform:

$$\langle n, x \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d.h. minimaler Abstand $\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) Hilfswinkel: Winkel Gerade, Normale

$$\cos\varphi = \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle}{\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \| \| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Longrightarrow \varphi = 45°$
$\Longrightarrow$ Schnittwinkel $= 90° - \varphi = 45°$

d) $E_2 : x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Ansatz: $\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bedingung: $\langle e_1, \tilde{e}_2 \rangle = 1 - \mu = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

$\Longrightarrow \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

a) Nullstellen: $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$
$\Longrightarrow x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 \Longrightarrow$ keine Nullstelle

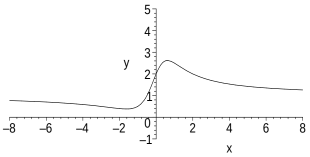
Extremstellen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2} = 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow -2x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\Longrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$
$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
$\lim_{x\to\infty} x^2 f'(x) = -2$, $\lim_{x\to\infty} x^2 f'(x) = -2$



c) $$\frac{x^2+2x+2}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x+1}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$
$\Longrightarrow \int f(x)dx = x + \ln|x^2+1| + \arctan x + c$

d)

$$\begin{aligned}
\text{ges. Fläche} &= \int_3^\infty (f(x)-1)dx \\
&= \lim_{z\to\infty} \int_3^z (f(z)-1)dx \\
&= \lim_{z\to\infty} (x + \ln|x^2+1| + \arctan x - x)|_{x=3}^z \\
&= \lim_{z\to\infty} (\ln|z^2+1| + \arctan z - \ln 10 + \arctan 3) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) $a_2 = \dfrac{1^2+4+1}{9} a_1 = \dfrac{2}{3}$

$a_3 = \dfrac{2^2+8+1}{2^3+8} a_2 = \dfrac{13}{16} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{13}{24}$

Es ist
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2+4n+1}{n^3+8} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$
d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und $a_n \geq 0 \Longrightarrow$ Grenzwert existiert.

Berechnen $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+1}{n^3+8}}_{=0} \lim_{n\to\infty} a_n$

b) Konvergenzradius
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty \quad \text{nach } a)$$

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n x^n &= \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
\Longrightarrow a_3 &= \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \Longrightarrow f^{(3)}(0) = \frac{6\cdot 13}{24} = \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

c) nicht achsensymmetrisch, da $a_1 \neq 0$
keine Polstellen: $f(x) = \infty$ in Polstelle x, Widerspruch zu Konvergenzradius ∞

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{\frac{1}{1+x^2}} = \dfrac{f'(0)}{1} = a_1 = 1$ nach ℓ'Hospital

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(y)dy = f(0) = 0$
nach ℓ'Hospital oder Mittelwertsatz.