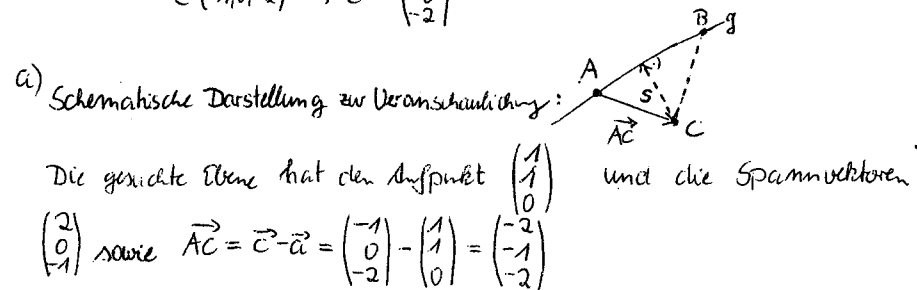


① Gerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

Punkte: $A(1,1,0) \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$B(3,1,-1) \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$C(-1,0,-2) \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$



\Rightarrow Ebenengleichung in Parameterform:

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mu, \tau \in \mathbb{R}$

Ein Normalenvektor an diese Ebene ist

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{1+36+4} = \sqrt{41}$

\Rightarrow Ein Normaleinheitsvektor: $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalenform d. Ebene: $(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \cdot \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{41}} \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{41}}$ bzw. $\frac{-x+6y-2z-5}{\sqrt{41}} = 0$

Wegen $\frac{5}{\sqrt{41}} > 0$ und da mit einem Normaleinheitsvektor \vec{n}_0 gerechnet wurde, ist dies die Hesse-Normalform von E .

b) Für den Flächeninhalt von D gilt (vgl. Skizze):

(1) $|D| = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \stackrel{s.o.}{=} \frac{1}{2} \sqrt{41}$

Berechnet man den Abstand von C zu g mit s , so gilt für diesen Flächeninhalt auch:

(2) $|D| = \frac{1}{2} \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot s$ wobei $|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Aus (1)=(2) folgt: $s = \frac{\sqrt{41}}{|\vec{AB}|} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{5}}$

c) Weitere Gerade mit reellem Parameter t :

$h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -12 \\ t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$

h_t und g sind auf jeden Fall windschief, dh. sie schneiden sich nicht, wenn sie nicht in einer Ebene liegen. Umgekehrt d. entgegen gesetzten Fall: Für welche t liegen h_t und g in einer Ebene, so daß sie evtl. nicht windschief sind?

Da der Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowohl auf h_t als auch in E liegt, liegt h_t genau dann in E , wenn wenn der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -12 \\ t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ von h_t und der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ von E orthogonal sind.

$\Leftrightarrow 0 = \begin{pmatrix} -12 \\ t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = 12 + 6t - 6t^2 \Leftrightarrow 2 + t - t^2 = 0$

$\Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{matrix} \nearrow +2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$

Also: h_t und g sind genau dann windschief, wenn $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ gilt.

Dem die Betrachtung der restlichen beiden Fälle, dh. wenn h_t und g in einer Ebene liegen, zeigt:

$\boxed{t=1} : h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist nicht parallel zu $g \Rightarrow h_1, g$ schneiden sich und sind somit nicht windschief

$t=+2$ $h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -12 \\ +2 \\ 12 \end{pmatrix}$ ist nicht parallel zu $g \Rightarrow \dots \Rightarrow$ nicht windschief 3

d) Wir haben in c) gesehen, daß h_2 und g in eine Ebene liegen, wobei sie nicht parallel sind. Somit schneiden sie sich...
 \Rightarrow g und h_2 haben den Abstand 0

② $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$, $x_0 = a$
 $x_{n+1} = a + x_n^2$ mit $n \in \mathbb{N}_0$

a) z.z.: $0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$0 \leq x_n$

Beweis durch vollst. Induktion:

Incl. Anfang: $x_0 = a \stackrel{z.z.}{\geq} 0$ stimmt

Incl. Voraussetzung: $x_n \geq 0$ stimmt für ein $n \in \mathbb{N}_0$

Incl. Schluß: $n \rightsquigarrow n+1$
 $x_{n+1} = a + x_n^2 \stackrel{I.V.}{\geq} a + 0 \geq 0$ ok.

• Monotonie: $x_n \leq x_{n+1}$, dh (x_n) wächst monoton

Beweis durch vollst. Induktion:

Incl. Anfang: $x_0 = a$, $x_1 = a + a^2 \Rightarrow x_1 - x_0 = a^2 \geq 0$
 $\Rightarrow x_0 \leq x_1$ stimmt

Incl. Voraussetzung: $x_n \leq x_{n+1}$ stimmt für ein $n \in \mathbb{N}_0$

Incl. Schluß: $n \rightsquigarrow n+1$ $x_n \geq 0$ (s.o.)
 $x_{n+1} = a + x_n^2 \stackrel{I.V.: x_n \geq x_{n-1} \Leftrightarrow x_n^2 \geq x_{n-1}^2}{\geq} a + x_{n-1}^2 = x_n$ ok.

$x_n \leq \frac{1}{2}$

Beweis durch vollst. Induktion:

Incl. Anfang: $x_0 = a \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ stimmt

Incl. Vorauss: $x_n \leq \frac{1}{2}$ stimmt für ein $n \in \mathbb{N}_0$

Incl. Schluß: $x_{n+1} = a + x_n^2 \stackrel{I.V. \text{ und } a \leq \frac{1}{4}}{\leq} \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ok.

b) Nach a) ist (x_n) monoton wachsend und nach oben durch $\frac{1}{2}$ beschränkt. Damit ist die Folge konvergent. (Konvergenzsatze für monotone Folgen, Satz 8.24 im Skript)

c) Es gilt $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$

Also: $x_{n+1} = a + x_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = a + x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x + a = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$

Wegen $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ folgt: $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4a}$

③ $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} x^n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n := \frac{n+1}{(n+2)!}$

a) Konvergenzradius: Bestimmung mit Hilfe des Quotientenkriteriums:

$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{(n+1)}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+3)!}{n+2} \right| = \frac{(n+1)(n+3)}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Also: $r = \infty$

$\Rightarrow f$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Aus $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} x^n$ folgt nach Integration (gliedweise Integration erlaubt, da es sich bei f um eine Potenzreihe handelt und daher innerhalb des Konvergenzradius' gleichmäßige Konvergenz vorliegt)

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^{n+1} + C$

Wegen $0 = F(0) = 0 + C$ muß gelten: $C = 0$

Als lautet die gesuchte Stammfunktion: $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^{n+1}$

c) $F(x) \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^{n+2} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
 $= \frac{1}{x} (e^x - 1 - x) = \underline{\underline{\frac{e^x - 1 - x}{x}}}$

also:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x=0, \\ \frac{1}{x}(e^x - 1 - x), & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

d) für $x \neq 0$ gilt:

$$f(x) = F'(x) = \frac{-1}{x^2}(e^x - 1 - x) + \frac{1}{x}(e^x - 1) = \frac{x e^x - x - e^x + 1 + x}{x^2} = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$$

Für $x=0$ erhält man aus der Ausgangsreihe

$$f(0) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} 0^{n-2} = \frac{2-1}{2!} = \frac{1}{2}, \text{ was}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + (x-1)(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder auch: } f(0) = F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

übereinstimmt!

(Klar, denn f bzw F sind als in Potenzreihen entwickelbare Funktionen unendlich oft stetig differenzierbar.)

also:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } x=0, \\ \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}, & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

④

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{\sqrt{x^3}} dx \quad \text{mit dem Integranden } f(x) := \frac{e^{-x} \sin x}{\sqrt{x^3}}$$

$$a) \text{ Teile auf: } I = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{e^{-x} \sin x}{\sqrt{x^3}} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{\sqrt{x^3}} dx$$

⇒ kritische Stellen: • $x=0$, da dort der Nenner verschwindet, dh. Singularität des Integranden liegt vor (nicht abbar...)
• $x \rightarrow \infty$, dh. der Integrationsbereich ist unbeschränkt

$x=0$ Betrachte den Integranden $f(x)$ von I_1 für $x \rightarrow 0$:

$$\frac{e^{-x} \sin x}{x^{3/2}} = \frac{(1-x+o(x))(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}{x^{3/2}} = \frac{x-x^2+o(x^2)}{x^{3/2}} = x^{-1/2} - x^{1/2} + o(x^{1/2})$$

⇒ Der Integrand verhält sich dort wie die Vergleichsfunktion

$$g(x) = x^{-1/2}.$$

($g(x)$ ist tatsächlich Vergleichsfunktion, da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots = 1$)

Da $\int_0^1 x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2$ und somit konvergent ist, konvergiert auch I_1 .

$x \rightarrow \infty$ Betrachte den Integranden $f(x)$ von I_2 für $x \rightarrow \infty$:

$$0 \leq |f(x)| = \frac{e^{-x} |\sin x|}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3}} \leq e^{-x} \quad \text{für } x > 1, \text{ dh. da ja } x \rightarrow \infty \text{ betrachtet wird.}$$

wobei $\int_1^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{\infty} = 0 + \frac{1}{e}$ und somit konvergiert.

⇒ $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ ist eine konvergente Majorante von $\int_{-1}^{\infty} |f(x)| dx$, dh. I_2

konvergiert nach dem Majorantenkriterium.

⇒ $I = I_1 + I_2$ ist konvergent