Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Eine Folge (z_n) von komplexen Zahlen wird rekursiv definiert durch

$$z_0 := 1\,, \qquad z_1 := -i/2\,, \qquad z_{n+2} := -\,\frac{z_n + iz_{n+1}}{2} \quad (n \geqslant 0)\,.$$

a) Berechnen Sie mittels der Rekursionsvorschrift die zwei Folgenglieder z_2 und z_3. Geben Sie den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahl $(4z_2 + 8z_3)^{-1}$ an.

b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geqslant 0$ gilt:

$$z_n = \tfrac{2}{3} i^n \big((-1)^n + 2^{-n-1} \big)\,.$$

c) Es sei $x_n := |z_n|$. Entscheiden Sie, ob die Folge (x_n) konvergent ist, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

d) Untersuchen Sie die Reihen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z_n$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{n^2}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

In $\mathbb{R}^3$ sind die drei Punkte $A = (6, -6, 3)$, $B = (13, -10, 7)$ und $C = (3, 4, -2)$ gegeben. Es bezeichne g die Gerade, die durch die Punkte A und B geht, und E sei die Ebene, die den Punkt C enthält und von g senkrecht durchstoßen wird.

a) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E an, und berechnen Sie, welchen Abstand der Punkt $D = (0, 7, -14)$ von dieser Ebene hat.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von g und E.

c) Welche Koordinaten hat der Punkt, der sich ergibt, wenn man den Punkt D an der Ebene E spiegelt?

d) Welcher Punkt der Gerade

$$h \;:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

hat vom Punkt D den geringsten Abstand?

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Auf dem Intervall $[0,1]$ sind drei Funktionenfolgen (f_n), (g_n) und (h_n) gegeben durch

$$f_n(x) := \big(\sin(\pi x)\big)^n, \qquad g_n(x) := e^{-nx+1}\big(\sin(n\pi x)\big)^n, \qquad h_n(x) := \big(2+\sin(\pi x)\big)^{-n}.$$

a) Bestimmen Sie für alle $x \in [0,1]$ die Grenzwerte

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x), \qquad h(x) := \lim_{n\to\infty} h_n(x).$$

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\frac{1}{2n})$ sowie $\max\{\, h_n(x) : x \in [0,1]\,\}$.

c) Welche der Funktionenfolgen konvergieren gleichmäßig auf dem Intervall $[0,1]$? Welche konvergieren dort nicht gleichmäßig? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(x) := \frac{2x^4+5x^3-x^2-5x+2}{x^3+x^2-2x}.$$

a) Berechnen Sie eine Stammfunktion von f.

b) Gibt es Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, so dass das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \big(f(x)+ax+b\big)\,dx$$

existiert? Begründen Sie Ihre Antwort, und berechnen Sie gegebenenfalls für diese Wahl der Konstanten den Wert des Integrals.

c) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $(1,\infty)$ genau ein lokales Extremum besitzt. Handelt es sich dabei um ein Maximum oder um ein Minimum?

Nach der Klausur

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Dienstag, den 10. Oktober, vor dem Sekretariat aus und können auch im Internet abgerufen werden:

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Donnerstag, dem 19. Oktober, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben. Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 23. bis 27. Oktober.