UNIVERSITÄT KARLSRUHE — Herbst 2000
MATHEMATISCHES INSTITUT I — 26.9.2000

Lösung zur Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** Die Rekursionsformel liefert

$$z_2 = -\frac{z_0 + iz_1}{2} = -\frac{1 + i(-i/2)}{2} = -\frac{1 + 1/2}{2} = -\frac{3}{4}\,,$$
$$z_3 = -\frac{z_1 + iz_2}{2} = -\frac{-i/2 + i(-3/4)}{2} = -\frac{i(-5/4)}{2} = \frac{5i}{8}\,.$$

Folglich erhalten wir

$$(4z_2 + 8z_3)^{-1} = \frac{1}{-3+5i} = \frac{1}{-3+5i} \cdot \frac{3+5i}{3+5i} = \frac{3+5i}{(5i)^2 - 3^2} = \frac{3+5i}{-25-9} = -\frac{3}{34} - i\frac{5}{34}\,,$$

d. h. es gilt: $\mathrm{Re}(4z_2 + 8z_3)^{-1} = -\frac{3}{34}$ und $\mathrm{Im}(4z_2 + 8z_3)^{-1} = -\frac{5}{34}$.

b) Induktionsanfang: Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Formel richtig, denn

$$\tfrac{2}{3}i^0\big((-1)^0 + 2^{-0-1}\big) = \tfrac{2}{3}(1 + \tfrac{1}{2}) = 1\,, \qquad \tfrac{2}{3}i^1\big((-1)^1 + 2^{-1-1}\big) = \tfrac{2}{3}i(-1 + \tfrac{1}{4}) = -i/2\,.$$

Induktionsschluss: Als Induktionsvoraussetzung (IV) nehmen wir an, die Formel sei für $n \in \{0, \dots, k\}$ bewiesen, wobei $k \geqslant 1$. Dann gilt sie auch für $n = k + 1$, denn

$$\begin{aligned}
z_{k+1} &= -\tfrac{1}{2}(z_{k-1} + iz_k) \overset{\text{IV}}{=} -\tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{2}{3}i^{k-1}\big((-1)^{k-1} + 2^{-(k-1)-1}\big) + i\tfrac{2}{3}i^k\big((-1)^k + 2^{-k-1}\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{3}i^{k+1}\Big(-i^{-2}\big((-1)^{k-1} + 2^{-k}\big) - \big((-1)^k + 2^{-k-1}\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{3}i^{k+1}\Big((-1)^{k-1} + 2^{-k} - (-1)^k - 2^{-k-1}\Big) = \tfrac{1}{3}i^{k+1}\big(2(-1)^{k-1} + 2^{-k-1}\big) \\
&= \tfrac{2}{3}i^{k+1}\big((-1)^{k-1} + 2^{-k-2}\big) = \tfrac{2}{3}i^{k+1}\big((-1)^{k+1} + 2^{-(k+1)-1}\big)\,.
\end{aligned}$$

c) Gemäß **b)** haben wir

$$x_n = \big|\tfrac{2}{3}i^n\big((-1)^n + 2^{-n-1}\big)\big| = \tfrac{2}{3}\big|(-1)^n + 2^{-n-1}\big| = \begin{cases} \tfrac{2}{3}(1 + 2^{-n-1})\,, & n \text{ gerade}\,, \\ \tfrac{2}{3}(1 - 2^{-n-1})\,, & n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Wegen $2^{-n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ergibt sich: Die Folge (x_n) ist konvergent, und es gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}$.

d) Wie wir aus **c)** wissen, gilt $|z_n| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}$. Folglich ist $((-1)^n z_n)$ keine Nullfolge, und damit kann die erste der beiden Reihen nicht konvergent sein.

Die zweite Reihe dagegen ist konvergent: Da (z_n) konvergiert, ist die Folge insbesondere beschränkt; es gibt also eine Konstante C mit $|z_n| \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $|z_n/n^2| \leqslant C/n^2$, und die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n/n^2$ folgt mit dem Majorantenkriterium aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} C/n^2$.

Aufgabe 2 **a)** Ein Richtungsvektor von g und damit ein Normalenvektor von E ist

$$\vec{n} := \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Ebene E wird dargestellt durch die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = \alpha$ mit einem gewissen $\alpha \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $\overrightarrow{OC} = (3, 4, -2)$ liefert $\alpha = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{n} = 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 4 = -3$.

Die Gleichung der Ebene E lautet mithin $\vec{x} \cdot \vec{n} = -3$. Um hieraus die Hessesche Normalform zu erhalten, müssen wir die Gleichung noch durch $-\|\vec{n}\| = -9$ dividieren:

$$E \ : \ \vec{x} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

Der Abstand zwischen D und der Ebene E ist dann

$$\left| \overrightarrow{OD} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{0 \cdot (-7) + 7 \cdot 4 - 14 \cdot (-4)}{9} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{84}{9} - \frac{3}{9} \right| = 9\,.$$

b) Die Gerade g hat die Darstellung

$$g \ : \ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{n} \quad (\lambda \in \mathbb{R})\,.$$

Einsetzen in die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = -3$ der Ebene E liefert

$$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} + \lambda \vec{n} \cdot \vec{n} = -3\,, \quad \text{also} \quad 6 \cdot 7 - 6 \cdot (-4) + 3 \cdot 4 + 81\lambda = -3\,, \quad \text{d.h.} \quad \lambda = -1\,.$$

Der Schnittpunkt von g und E ist somit $(6, -6, 3) - (7, -4, 4) = (-1, -2, -1)$.

c) Der gesuchte Punkt, den wir mit P bezeichnen wollen, liegt auf der Gerade durch D, die auf E senkrecht steht, d. h. es gilt $\overrightarrow{OP} = (0, 7, -14) + \lambda(7, -4, 4)$ mit einem gewissen $\lambda \in \mathbb{R}$. Außerdem hat P den gleichen Abstand von E wie D, es gilt also

$$9 = \left| \overrightarrow{OP} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{-7 \cdot 7\lambda + 4(7 - 4\lambda) - 4(-14 + 4\lambda)}{9} - \frac{3}{9} \right| = |-9\lambda + 9|\,.$$

Folglich ist $\lambda = 0$ oder $\lambda = 2$. Da $\lambda = 0$ den Punkt D liefert, muss man für P den Wert $\lambda = 2$ wählen. Es gilt somit $P = (0, 7, -14) + 2(7, -4, 4) = (14, -1, -6)$.

d) Gesucht ist der Vektor $\vec{x}(\lambda) = (3 + \lambda, 6 + 2\lambda, -9 + \lambda)$, für den $\|\vec{x}(\lambda) - \overrightarrow{OD}\|$ minimal wird. Genauso gut können wir natürlich das Quadrat hiervon minimieren, also die Funktion $f(\lambda) := \|\vec{x}(\lambda) - \overrightarrow{OD}\|^2$. Es gilt

$$f(\lambda) = \left\| \begin{pmatrix} 3 + \lambda \\ 6 + 2\lambda \\ -9 + \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} \right\|^2 = (3 + \lambda)^2 + (-1 + 2\lambda)^2 + (5 + \lambda)^2 = 35 + 12\lambda + 6\lambda^2.$$

Wegen $f'(\lambda) = 12 + 12\lambda$ und $f''(\lambda) = 12 > 0$ hat f an der Stelle $\lambda = -1$ ein globales Minimum. Der gesuchte Punkt auf h ist also $\vec{x}(-1) = (3, 6, -9) - (1, 2, 1) = (2, 4, -10)$.

Aufgabe 3 **a)** Zunächst zu f. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n(\frac{1}{2}) = \big(\sin(\frac{1}{2}\pi)\big)^n = 1^n = 1$, d. h. es ist $f(\frac{1}{2}) = 1$. Für alle $x \in [0,1]$ mit $x \neq \frac{1}{2}$ gilt dagegen $|\sin(\pi x)| < 1$ und damit $f_n(x) = \big(\sin(\pi x)\big)^n \to 0$ für $n \to \infty$. Folglich ergibt sich

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x = \frac{1}{2}\,, \\ 0\,, & x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}\,. \end{cases}$$

Wir kommen zu g. Es gilt $g_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $g(0) = 0$. Ist dagegen $x \in (0,1]$, so haben wir $e^{-nx+1} \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen $|\sin(\dots)| \leqslant 1$ folgt hieraus $g_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Also ist $g(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Nun fehlt nur noch h. Für $x \in [0,1]$ ist $\sin(\pi x) \geqslant 0$, also $2 + \sin(\pi x) \geqslant 2$ und damit $0 \leqslant h_n(x) \leqslant 2^{-n}$. Wegen $2^{-n} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt: $h(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

b) Es ergibt sich $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\frac{1}{2n}) = \sqrt{e}$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$g_n(\tfrac{1}{2n}) = e^{-1/2+1}\big(\sin(\tfrac{1}{2}\pi)\big)^n = e^{1/2}\,.$$

Oben hatten wir uns schon überlegt, dass $h_n(x) \leqslant 2^{-n}$ gilt. Wegen $h_n(0) = 2^{-n}$ ist also $\max\{\, h_n(x) : x \in [0,1]\,\} = 2^{-n}$.

c) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen die Funktion f. Da aus gleichmäßiger Konvergenz die punktweise Konvergenz folgt, ist f die einzige Funktion, gegen die (f_n) auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergieren könnte. Da alle f_n stetig sind, f jedoch nicht, liegt aber keine gleichmäßige Konvergenz auf $[0,1]$ vor. (Bei gleichmäßiger Konvergenz würde sich die Stetigkeit übertragen.)

Auch die Folge (g_n) konvergiert auf $[0,1]$ zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion g, denn es gilt

$$\sup\{\, |g_n(x) - g(x)| : x \in [0,1]\,\} = \sup\{\, |g_n(x)| : x \in [0,1]\,\} \geqslant g_n(\tfrac{1}{2n}) \overset{\textbf{b)}}{=} \sqrt{e}\,,$$

d. h. dieses Supremum strebt für $n \to \infty$ nicht gegen 0.

Die Folge (h_n) konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen h, denn

$$\sup\{\, |h_n(x) - h(x)| : x \in [0,1]\,\} = \sup\{\, |h_n(x)| : x \in [0,1]\,\} \overset{\textbf{b)}}{=} 2^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Aufgabe 4 **a)** Wir führen zunächst eine Polynomdivision durch: Es gilt

$$\begin{aligned} 2x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x + 2 &= 2x(x^3 + x^2 - 2x) + 3x^3 + 3x^2 - 5x + 2 \\ &= 2x(x^3 + x^2 - 2x) + 3(x^3 + x^2 - 2x) + (x+2)\,. \end{aligned}$$

Somit kann man f auch schreiben als

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{x+2}{x^3 + x^2 - 2x}\,.$$

Wir suchen nun die Nullstellen des Nenners: Es ist

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)\,.$$

Damit wissen wir: $f(x)$ ist definiert für $x \notin \{-2, 0, 1\}$, und es gilt

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{x+2}{x(x-1)(x+2)} = 2x + 3 + \frac{1}{x(x-1)}\,.$$

Dies können wir durch eine Partialbruchzerlegung noch weiter umformen: Es existieren reelle Konstanten c und d mit

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{c}{x} + \frac{d}{x-1}\,, \qquad \text{also} \quad 1 = c(x-1) + dx\,.$$

Man liest ab: $c = -1$ und $d = 1$. Somit haben wir folgende Darstellung von f gewonnen:

$$(*) \qquad f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\,.$$

Eine Stammfunktion hiervon ist

$$F(x) = x^2 + 3x - \ln|x| + \ln|x-1| = x^2 + 3x + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\,.$$

b) Solche Konstanten existieren. Wählt man nämlich $a = -2$ und $b = -3$, so ist

$$f(x) + ax + b = 2x + 3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - 2x - 3 = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\,,$$

und damit hat man

$$\begin{aligned} \int_2^\beta \big(f(x) + ax + b\big)\,dx &= \int_2^\beta \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\,\Bigg|_{x=2}^{\beta} \\ &= \ln\frac{\beta-1}{\beta} - \ln\frac{2-1}{2} \xrightarrow{\beta\to\infty} \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2\,. \end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert also für diese Wahl der Konstanten a und b und hat den Wert $\ln 2$.

c) Aus der Darstellung $(*)$ von f ergibt sich

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\,, \qquad f''(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x-1)^3}\,.$$

Es gilt $f'(x) \to -\infty$ für $x \to 1$ und $f'(x) \to 2$ für $x \to \infty$. Da f' stetig ist, muss f' auf $(1, \infty)$ also mindestens eine Nullstelle besitzen. Für $x \in (1, \infty)$ ist $x^3 > (x-1)^3$ und damit $f''(x) > 0$. Auf dem Intervall $(1, \infty)$ ist f' somit streng monoton wachsend. Insgesamt: f' besitzt auf $(1, \infty)$ genau eine Nullstelle x_0 und es ist $f''(x_0) > 0$. Somit hat die Funktion f auf $(1, \infty)$ genau ein lokales Extremum, und zwar ein Minimum.