UNIVERSITÄT KARLSRUHE | Herbst 2001
MATHEMATISCHES INSTITUT I | 25.9.2001

Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^3 .$$

a) Bestimmen Sie für

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

die Menge $f^{-1}(H)$. Skizzieren Sie H und $f^{-1}(H)$.

b) Geben Sie für

$$B := \{z \in H \mid -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ z \neq 0\}$$

die Menge $f(B)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort und skizzieren Sie B und $f(B)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Welche der Funktionen $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ mit

$$f_1\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{(\sin x)^2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad f_2\colon x \mapsto |x|^{\frac{3}{2}} + 3x$$

ist im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar (Begründung!)? Geben Sie im Fall der Differenzierbarkeit in x_0 den Wert der Ableitung an.

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |\arctan(x-1)|$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ die rechtsseitige Ableitung $g'_+(x)$ und die linksseitige Ableitung $g'_-(x)$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist g differenzierbar?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Auf dem Intervall $(-1,1)$ ist die Funktion

$$f(x) = \ln(1-x^4)$$

gegeben.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung:

$$-\frac{4x^4}{1-x^4} \leq f(x) \leq 0,$$

falls $x \in (-1,1)$ ist.

b) Begründen Sie, warum besser als in **a)** die obere Abschätzung

$$f(x) \leq T_8(x) \leq 0$$

gilt, wobei T_8 das zu f gehörende Taylor-Polynom vom Grad 8 ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist durch

$$I_n := \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[n]{x^3}} \sin x \, dx$$

ein uneigentliches Integral gegeben. Bestimmen Sie alle n, für die I_n konvergiert.

b) Begründen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

konvergiert, und berechnen Sie dessen Wert.

Hilfe zu **b)**: *Verwenden sie ohne Beweis, dass* $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *gilt.*

Nach der Klausur Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, den 10. Oktober, vor dem Sekretariat aus und können auch im Internet abgerufen werden:

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 16. Oktober, von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekannt gegeben. Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 22. bis 26. Oktober.