Lösungsvorschläge zur Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1

a) Da zur Bestimmung des Urbilds von H Wurzeln gezogen werden sollen, bieten sich zur Beschreibung von H Polarkoordinaten an:

$$H = \{r \cdot e^{i\varphi} \mid r \geq 0,\ \varphi \in [0, \pi]\}.$$

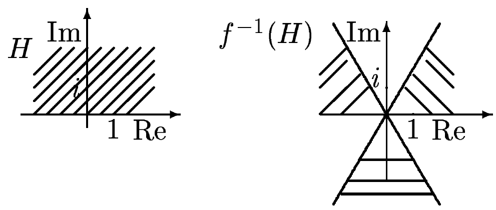
Wegen

$$f^{-1}(\{r \cdot e^{i\varphi}\}) = \left\{ \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{3}}, \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}, \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} \right\}$$

folgt

$$f^{-1}(H) = \left\{ \rho \cdot e^{i\alpha} \;\middle|\; \rho \geq 0,\ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \right\}.$$

Skizzen:



b) Für komplexe $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) \neq 0$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{r \cdot \cos\varphi}{r} = \cos\varphi.$$

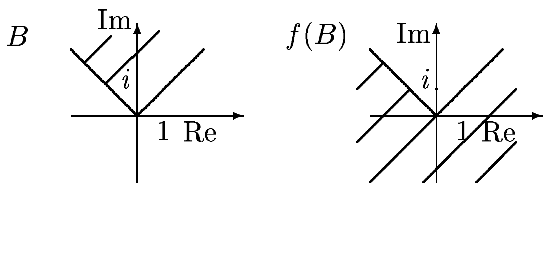
Für $z \in B \subseteq H$ ist $\varphi \in [0, \pi]$ und $\cos\varphi \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, was äquivalent zu $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ist. Somit ist

$$B = \left\{ r \cdot e^{i\varphi} \;\middle|\; r > 0,\ \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \right\}$$

und

$$f(B) = \left\{ r \cdot e^{i\varphi} \;\middle|\; r > 0,\ \varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right] \right\}.$$

Skizzen:



Aufgabe 2

a) Die Differenzenquotienten helfen uns:

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \frac{\frac{(\sin x)^2}{x} - 0}{x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \stackrel{x \to 0}{\longrightarrow} 1^2 = 1.$$

Also ist f_1 in $x_0 = 0$ differenzierbar und $f_1'(0) = 1$.

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{|x|^{\frac{3}{2}} + 3x}{x} = \frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{x} + 3 \stackrel{x \to 0}{\longrightarrow} 0 + 3 = 3$$

wegen $\left|\frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{x}\right| = |x|^{\frac{1}{2}} \stackrel{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Also ist f_2 in $x_0 = 0$ differenzierbar und $f_2'(0) = 3$.

b)

$x > 1$: Für $x > 1$ ist $\arctan(x-1) > 0$. Also ist $g(x) = \arctan(x-1)$ dort differenzierbar und

$$g_+'(x) = g_-'(x) = g'(x) = \frac{1}{1 + (x-1)^2}.$$

$x < 1$: Entsprechend ist für $x < 1$ die Funktion $g(x) = -\arctan(x-1)$ differenzierbar und

$$g_+'(x) = g_-'(x) = g'(x) = -\frac{1}{1 + (x-1)^2}.$$

$x = 1$: Es ist

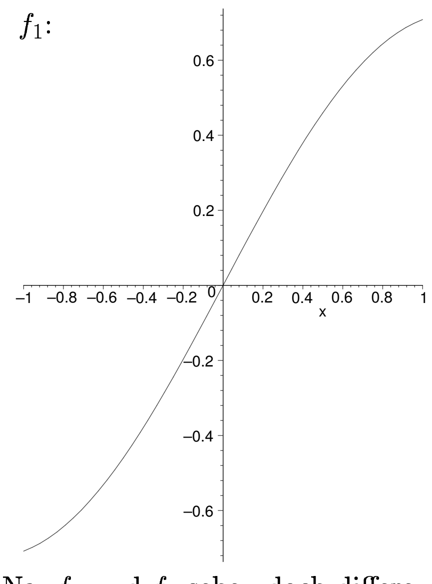
$$g_+'(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{\arctan(x-1)}{x-1} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{1+(x-1)^2}}{1} = 1$$

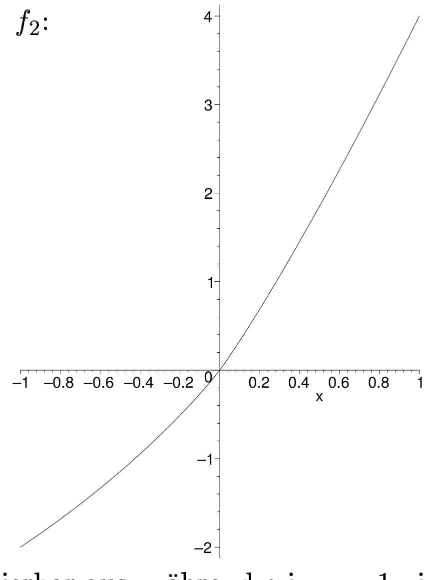
und

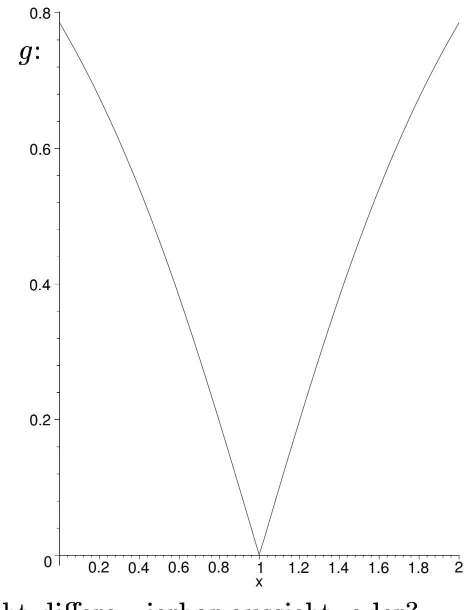
$$g_-'(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{-\arctan(x-1)}{x-1} = -1.$$

Es ist also g genau in $x = 1$ nicht differenzierbar.

Da vielen Teilnehmenden der Klausur nicht klar war, was Differenzierbarkeit bedeutet, empfehlen wir die nochmalige Lektüre der einschlägigen Literatur diesbezüglich sowie die Betrachtung der Graphen der beteiligten Funktionen:







Na, f_1 und f_2 sehen doch differenzierbar aus, während g in $x = 1$ nicht differenzierbar aussieht, oder?

Aufgabe 3

a) Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, dass ein ξ zwischen 0 und x existiert mit

$$f(x) - f(0) = (x - 0) \cdot f'(\xi).$$

Hier heißt dies einfach

$$f(x) = x \cdot f'(\xi) = -x \cdot \frac{4\xi^3}{1-\xi^4}.$$

Die Ungleichung $f(x) \le 0$ folgt nun ganz leicht: Für $x \ge 0$ gilt sie wegen $\xi \in [0, x]$ und für $x \le 0$ wegen $\xi \in [x, 0]$.

Zur Ungleichung $-\frac{4x^4}{1-x^4} \le f(x) = -x \cdot \frac{4\xi^3}{1-\xi^4}$:
Es ist

$$g(x) := -\frac{4x^3}{1-x^4} = \begin{cases} \frac{4}{x - \frac{1}{x^3}}, & x \in (-1,1) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

monoton fallend: denn $x - \frac{1}{x^3}$ ist wegen $\left(x - \frac{1}{x^3}\right)' = 1 + \frac{3}{x^4}$ auf den beiden Intervallen $(0,1)$ und $(-1,0)$ jeweils stetig und monoton wachsend, und zudem ist g auf $(-1,0)$ positiv und auf $(0,1)$ negativ.

Im Fall $x \ge 0$ ist $0 \le \xi \le x$, und die Monotonie von g liefert die Behauptung.

Ist $x \le 0$, also $x \le \xi \le 0$, so liefert die Monotonie von g zunächst

$$-\frac{4\xi^3}{1-\xi^4} \le -\frac{4x^3}{1-x^4}.$$

Multiplikation mit $x \le 0$ liefert nun die Behauptung.

b) In $(-1,1)$ haben wir die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Dies liefert

$$\ln(1-x^4) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^{4n}}{n} = \underbrace{-x^4 - \frac{x^8}{2}}_{=T_8(x) \le 0} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} -\frac{x^{4n}}{n}}_{\le 0},$$

was die behauptete Ungleichung beweist.

Aufgabe 4

a) Es ist

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[n]{x^3}} \sin x \, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{x^3}} \sin x \, dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[n]{x^3}} \sin x \, dx \, .$$

1. Summand:
Aus $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ folgt für x hinreichend nahe bei Null:

$$\frac{x}{2} \le \sin x \le x.$$

Dies ergibt

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{x^3}} \cdot \frac{x}{2}}_{=\frac{1}{2} \cdot x^{1-\frac{3}{n}}} \le \frac{1}{\sqrt[n]{x^3}} \sin x \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{x^3}} \cdot x}_{=x^{1-\frac{3}{n}}}$$

Minoranten- und Majorantenkriterium zeigt, dass $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{x^3}} \sin x \, dx$ genau für

$$1 - \frac{3}{n} > -1 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{3}{2}$$

konvergiert.

2.Summand:
Wir behaupten, dass

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$$

für alle $\alpha > 0$ konvergiert. Es ist nämlich für alle $R > 1$

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx = -\frac{\cos x}{x^\alpha}\bigg|_1^R - \alpha \int_1^R \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} \, dx \, ,$$

und beide Summanden konvergieren für $R \to \infty$. Somit konvergiert I_n genau dann, wenn $n \ge 2$ ist.

b) Substituiere $u = \frac{1}{x^2}$, dann wird $dx = -\frac{du}{2\sqrt{u^3}}$ und

$$\int_0^R \sin \frac{1}{x^2} \, dx = \int_R^0 -\frac{\sin u}{2\sqrt{u^3}} \, du = \int_0^R \frac{\sin u}{2\sqrt{u^3}} \, du = -\frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \sin u \bigg|_0^R + \int_0^R \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \cos u \, du \, .$$

Nach **a)** konvergiert das dritte Integral für $R \to \infty$, und der Hinweis — angewandt auf die ganz rechte Seite — verrät uns, den Wert: nämich

$$\int_0^\infty \sin \frac{1}{x^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, .$$