UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

24.09.2002
Herbst 2002

DIPLOM–VORPRÜFUNG

zur Höheren Mathematik für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1. KLAUSUR

1. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben sind die Gerade

$$g \,:\, \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

und die Punkte

$$P_t(3, t+1, 2t-1) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ bestimme man die Hesse-Normalform einer Ebene E_t, die g und P_t enthält. Berechnen Sie gegebenenfalls die Werte $t \in \mathbb{R}$, für die es mehr als eine derartige Ebene E_t gibt, und geben Sie für jeden dieser t-Werte die Hesse-Normalform einer weiteren Ebene an, die g und P_t enthält.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden h an, die durch P_0 und parallel zu g verläuft.

c) Mit M sei die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, die von g und h jeweils den gleichen Abstand haben. Bestimmen Sie eine Gleichung, der ein Punkt Q genügen muß, damit $Q \in M$ gilt.

d) Berechnen Sie $\min\limits_{\vec{x} \in M} \left(\min\limits_{\vec{y} \in g} \| \vec{x} - \vec{y} \| \right)$, und geben Sie alle $\vec{x} \in M$ an, für die dieses Minimum angenommen wird.

2. Aufgabe (10 Punkte):

Für $n = 1, 2, \ldots$ ist $g_n(x) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben.

a) Bestimmen Sie die Stellen x, in denen g_n lokale Extremwerte besitzt.

b) Beweisen Sie für ungerade n: g_n hat genau eine Nullstelle x_n, und es gilt $-2 < x_n \leq -1$. Untersuchen Sie g_n für gerade n auf Nullstellen. Begründen Sie sorgfältig.

– bitte wenden –

3. Aufgabe (10 Punkte):

a) Leiten Sie für $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, eine Formel zur Berechnung von $f^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$, her. Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.

b) Berechnen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der durch

$$\begin{cases} y' + y = 2xe^{-x} \ , \ x \in \mathbb{R}, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definierten Funktion $y = y(x)$. Geben Sie diese Funktion explizit an.

4. Aufgabe (10 Punkte):

a) Berechnen Sie alle Stammfunktionen von

$$f(x) = \frac{2e^{6x} + 4e^{4x} - e^{2x} - 1}{e^{4x} - 1} \ , \ x > 0 \, .$$

b) Es sei F eine beliebige Stammfunktion von f. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{e^{2x}} \, .$$

Hinweis: b) kann auch ohne Verwendung von a) bearbeitet werden.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, dem 9. Oktober, vor dem Sekretariat aus und liegen ab Montag, dem 14. Oktober, unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 15. Oktober, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 21. bis 25. Oktober.