Lösungen zur 1. Klausur (VD) im Herbst 2002

1 a) $g: \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$P_t(3, t+1, 2t-1)$, $t \in \mathbb{R}$

$g, P_t \in E_t$ $\Rightarrow$ Konstruiere Ebene aus einem Aufpunkt und zwei linear unabh. Spannvektoren:

$$E_t \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \eta\left(\begin{pmatrix}3\\t+1\\2t-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix}2\\t+1\\2t\end{pmatrix} \quad (\mu, \eta \in \mathbb{R})$$

wobei $t \neq 1$, da sonst d. Spannvektoren lin. abh. wären

<u>1. Fall</u>: $t \neq 1$; es gibt jeweils genau eine Ebene E_t.

Normalenvektor an E_t: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\t+1\\2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t-t-1\\2-2t\\t+1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t-1\\2-2t\\t-1\end{pmatrix} = (t-1)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

HNF: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{(x-2y+z)\frac{1}{\sqrt{6}} = 0}}$

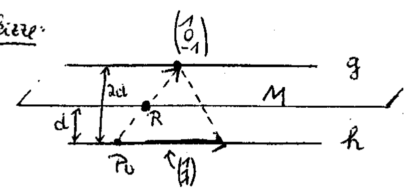
<u>2. Fall</u>: $t = 1$, dh. P_t liegt auf g, dh. es gibt unendlich viele Ebenen, die das gewünschte leisten, nämlich alle die, die g enthalten. $\Rightarrow$ Der zweite Spannvektor kann beliebig gewählt werden z.B.

(i) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow}$ HNF: $\underline{\underline{(x-2y+z)\frac{1}{\sqrt{6}} = 0}}$ (s.o.)

(ii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow$ HNF: $\underline{\underline{(y-z-1)\frac{1}{\sqrt{2}} = 0}}$

b) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(\tau \in \mathbb{R})$

<u>Skizze</u>:



c) M ist eine Ebene (vgl. Skizze), und zwar die Ebene, die genau zwischen g und h liegt. M ist senkrecht zu der Ebene E_0, in der g und h liegen.

$\Rightarrow$ Für den Normalenvektor $\vec{n}$ von M gilt: $\vec{n} \perp \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\text{Normalenvektor von } E_0}$ und $\vec{n} \perp \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor g, h}}$

$\Rightarrow$ Die beiden Vektoren $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ spannen M auf.

Ein Punkt auf M ist gegeben durch: $\vec{R} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$

Also: $\underline{\underline{M: \vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

bzw NF: $\underline{\underline{\left(\vec{x} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 0}} \Leftrightarrow \underline{\underline{-x+z+2 = 0}}$

d) $d = \min\limits_{\vec{x} \in M} \min\limits_{\vec{y} \in g} \|\vec{x} - \vec{y}\|$ ist der Abstand von M und g. Alle $\vec{x} \in M$, die diesen Abstand haben, liegen auf der Geraden $\tilde{h}$, die genau zwischen g und h liegt:

$\tilde{h}: \vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(\gamma \in \mathbb{R})$

Weiter gilt also: d = Halbe Abstand der beiden Geraden g und h.

Berechnung des Abstandes zweier paralleler Geraden mit Hilfe einer Dreiecksfläche (vgl. <u>Skizze</u>):

$$\text{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\text{Grundseite}}_{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3}} \cdot \underbrace{\text{Höhe}}_{2d} = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\right\| \overset{\text{vgl. a)}}{=} \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

2

$g_n(x) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}$

a) Lokale Extremstelle $\Rightarrow g_n'(x) \overset{!}{=} 0$ geom. Summe

$g_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ f. $x \neq 1$

<u>1. Fall</u> $x \neq 1$: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^n = 0 \Leftrightarrow x^n = 1 \overset{x \neq 1}{\Leftrightarrow}$ n gerade <u>und</u> $x = -1$

<u>2. Fall</u> $x = 1$: $g'(1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1^k = n \neq 0$

<u>Also</u>: Nur für <u>gerades n</u> gibt es bei <u>$x = -1$</u> eine lokale Extremstelle, da

$$g''(-1) = \left.\frac{1 + (n-1)x^n - n x^{n-1}}{(1-x)^2}\right|_{x=-1} = \frac{n}{2} \neq 0$$

(Genauer: $g''(-1) > 0 \Rightarrow$ Min.)

b) $\boxed{n \text{ ungerade}}$ $\Rightarrow$ Es gibt keine lok. Extremstellen (vgl. a)) $\Rightarrow$

$g_n(x)$ ist streng monoton und zwar st. monot. wachsend, da $g_n'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Es gibt höchstens eine Nullstelle.

gerade Anzahl von Summanden

Betrachte folgende Funktionswerte:

n ungerade

- $g_n(-2) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^k}{k} = \underbrace{(1-2)}_{<0} + \underbrace{\left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right)}_{<0} + \underbrace{\ldots}_{<0} + \underbrace{\frac{2^{n-1}}{n-1} - \frac{2^n}{n}}_{<0 \text{ da } n>2} < 0$

n ungerade

- $g_n(-1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \underbrace{1 - 1}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{>0} + \underbrace{\ldots}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}}_{>0} > 0$

Da g_n stetig ist, muß es nach dem Zwischenwertsatz mind. eine Nullstelle geben. Wegen der Monotonie (s.o.) ist es genau eine Nullstelle.

$\boxed{n \text{ gerade}}$

$g_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}$ = Polynom vom Grad n, wobei n gerade ist.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} g_n(x) = +\infty$, da der Summand mit der höchsten Potenz über das Verhalten bei $|x| \to \infty$ entscheidet.

Ungerade Anz. v. Summanden

$\Rightarrow$ Bei $x = -1$ liegt ein Minimum vor. (vgl. a))

$g_n(-1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \underset{n \text{ gerade}}{=} 1 - 1 + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}_{>0} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} > 0$

$\Rightarrow$ Es gilt $g_n(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ g_n hat für gerades n keine Nullstellen

3

a) $f(x) = x e^{-x}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x(-1) e^{-x} = (1-x) e^{-x}$

$f''(x) = -1 \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot (-1) e^{-x} = -(2-x) e^{-x}$

$f'''(x) = +1 e^{-x} + (2-x) e^{-x} = (3-x) \cdot e^{-x}$

Vermutung: $f^{(n)}(x) = (x-n) \cdot (-1)^n e^{-x}$

Beweis d. Vermutung durch vollständige Induktion

Ind. Anf.: $n=1$ $\quad f^{(1)}(x) = (1-x) e^{-x} = f'(x)$ stimmt

Ind. Voraus.: $f^{(n)}(x) = (x-n)(-1)^n e^{-x}$ stimme für ein $n \in \mathbb{N}$

Ind. Schluß: $f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \underset{\text{Ind. Voraus.}}{=} \frac{d}{dx} (x-n)(-1)^n e^{-x} = (-1)^n e^{-x} - (-1)^n (x-n) e^{-x}$

$= (-1)^n e^{-x} (1 - x + n) = (x-(n+1)) (-1)^{n+1} e^{-x}$ qB.

Es gilt also: $f^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n) e^{-x}$ $\quad (n = 1, 2, \ldots)$

b) Taylorreihe um $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^{(k)}(0) \, x^k$

$\Rightarrow$ $y^{(k)}(x)$ bzw $y^{(k)}(0)$ in DGL ablesen:

vgl. Aufgabe

$y'(x) = 2x e^{-x} - y(x) \quad \Rightarrow y'(0) = 0 - y(0) = 0$

$y''(x) = \frac{d}{dx}(2x e^{-x} - y(x)) = 2 \cdot (x e^{-x})' - y'(x) = 2(1-x) e^{-x} - y'(x)$

$\vdots$

$y^{(k)}(x) \underset{\text{vgl. a)}}{=} 2 \cdot (x e^{-x})^{(k-1)} - y^{(k-1)}(x) = 2(x-(k-1))(-1)^{k-1} e^{-x} - y^{(k-1)}(x)$

$\Rightarrow y^{(k)}(0) = 2(-1)^k (k-1) - y^{(k-1)}(0)$ $\leftarrow$ Rekursionsformel

also: $y(0) = 0$, $\ y'(0) = 0$ (vgl. oben bzw. Aufgabentext)

$y''(0) = 2(1-0) e^0 - 0 = 2 = 1 \cdot 2$

$y'''(0) = 2(-2)(-1)^2 - 2 = -6 = -2 \cdot 3$

$y^{(4)}(0) = 2(-3)(-1)^3 + 6 = 6 + 6 = 12 = +3 \cdot 4$

$y^{(5)}(0) = 2(-4)(-1)^4 - 12 = -20 = -4 \cdot 5$

Vermutung: $y^{(k)}(0) = (-1)^k k(k-1)$

Beweis durch vollständige Induktion

Ind. Anf.: $y'(0) = 0$ stimmt

Ind. Voraus.: $y^{(k)}(0) = (-1)^k k(k-1)$ gilt für ein $k \in \mathbb{N}$

Ind. Schluß: $y^{(k+1)}(0) \underset{\text{s.o.: Rek. formel}}{=} 2(-1)^{k+1} k - y^{(k)}(0) \underset{\text{I.V.}}{=} 2(-1)^{k+1} k - (-1)^k k(k-1) =$

$= (-1)^{k+1} (2k + k(k-1)) = (-1)^{k+1} k(k+1)$ stimmt

Also: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k k(k-1) x^k = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+2}}{k!} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x}{k!} =$

$= \underline{\underline{x^2 e^{-x}}}$

4

a) $f(x) = \dfrac{2e^{6x}+4e^{4x}-e^{2x}-1}{e^{4x}-1}$, $x>0$

Stammfunktion: $F(x) = \displaystyle\int^{x} \frac{2e^{6t}+4e^{4t}-e^{2t}-1}{e^{4t}-1}\,dt =$

<u>Subst:</u> $u = e^{2t} \Rightarrow du = 2u\,dt \Rightarrow dt = \dfrac{du}{2u}$

„Integrationsgrenze": $t = x \Rightarrow u = e^{2x}$

$$= \int^{e^{2x}} \frac{2u^3+4u^2-u-1}{u^2-1}\,\frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int^{e^{2x}} \frac{2u^3+4u^2-u-1}{(u-1)(u+1)u}\,du = (*)$$

Betrachte Integranden $\Rightarrow$ PBZ

Zählergrad = Nennergrad $\Rightarrow$ zunächst Polynomdivision erforderlich

$$\frac{2u^3+4u^2-u-1}{(u-1)(u+1)u} = 2u^3+4u^2-u-1 : u^3-u = 2 + \frac{4u^2+u-1}{(u-1)(u+1)u}$$

$$\begin{array}{l} 2u^3+4u^2-u-1 \\ \underline{2u^3-2u} \\ 4u^2+u-1 \end{array}$$

Ansatz f. PBZ:

$$\frac{4u^2+u-1}{(u-1)(u+1)u} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{u} \Rightarrow A = 2,\ B = 1,\ C = 1$$

Somit: $(*) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int^{e^{2x}} 2 + \frac{2}{u-1} + \frac{1}{u+1} + \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\Big[2u + 2\ln|u-1| + \ln|u+1| + \ln|u|\Big]^{e^{2x}}$

$$\underset{x>0}{=} e^{2x} + \ln\left(e^{2x}-1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) + x + c_1 , \quad (c_1 \in \mathbb{R})$$

b) Verwende Ergebnis aus a) oder:

l'Hospital → Integral ableiten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_c^x \frac{2e^{6x}+4e^{4x}-e^{2x}-1}{e^{4x}-1}}{e^{2x}} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \frac{\dfrac{2e^{6x}+4e^{4x}-e^{2x}-1}{e^{4x}-1}}{2e^{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{6x}+4e^{4x}-e^{2x}-1}{2e^{6x}-2e^{2x}} \cdot \frac{\frac{1}{2}e^{-6x}}{\frac{1}{2}e^{-6x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-4x}-\frac{1}{2}e^{-6x}}{1-e^{-4x}}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$