

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- a) Bestimme alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 - 125i = 0.$$

- b) Berechne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x^2)}{4x^2} \right).$$

- c) Betrachte

$$f(x) = \sin(x^{80}).$$

Bestimme $f^{(120)}(0)$ und $f^{(147)}(0)$.

- d) Bestimme die möglichen Limites der Rekursion

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + 34$$

für alle möglichen Startwerte $z_0 \in \mathbb{C}$. (Nachweis der Konvergenz nicht notwendig)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

- a) Bestimme den Schnittpunkt und Schnittwinkel der Geraden

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

und der Ebene

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

- b) Bestimme den Abstand der Ebene E_1 zum Ursprung.
c) Bestimme den Abstand von g_1 zum Ursprung.
d) Bestimme die Schnittgerade g_2 der Ebene E_1 und der Ebene

$$E_2 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

- e) Bestimme den Abstand der Geraden g_1 und g_2 .

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f(x) = -x^4 + x^2.$$

a) Bestimme die Nullstellen von f und die x -Werte möglicher Extremstellen. Skizziere den Graph der Funktion f .

b) Bestimme den Flächeninhalt der Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Zeichne M in die Skizze aus Teilaufgabe a) ein.

c) Betrachte

$$g(x) = f(x)e^{-x^2}.$$

Bestimme das Taylorpolynom $T_6(x, 0)$ sechsten Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Begründe, wieso die Taylorreihe von g zu $x_0 = 0$ auf ganz \mathbb{R} konvergiert.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachte

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right).$$

Verwende bei den Teilaufgaben a) und b) die Abschätzung $|\arctan y| \leq |y|$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und bei c) die Abschätzung $\arctan y > \frac{1}{2}y$ für alle $y \in (0, \frac{1}{10})$.

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x))^2?$$

b) Bestimme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n^{\frac{1}{4}}} f_n(x) dx.$$

c) Zeige:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)$$

konvergiert nicht.

d) Zeige:

$$|\arctan y| \leq |y|$$

für alle $y \in \mathbb{R}$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab **Montag, dem 6. Oktober 2003**, vor dem Sekretariat aus und finden sich im Internet unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html>.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am **Dienstag, dem 14. Oktober 2003, von 13.15 - 13.45 Uhr** im Seminarraum **S 31** (Mathematikgebäude) statt.

Ort und Termine für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom **20. Oktober bis 24. Oktober 2003**.