UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. Guido Schneider
Dipl.-Math. Oliver Zink
Dipl.-Math. oec Norbert Breindl

SS 2003
22.09.2003

Lösungsvorschläge zur Vordiplomsprüfung

in Höherer Mathematik I
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** $z^3 = 125i = 125e^{\frac{\pi}{2}i}$
$z_0 = \sqrt[3]{125}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i,\quad z_1 = \sqrt[3]{125}(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = -\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i,$
$z_2 = \sqrt[3]{125}(\cos(\frac{9\pi}{6}) + i\sin(\frac{9\pi}{6})) = -5i.$
bzw. $z_k = 5e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}i\pi k}$ $(k = 0,1,2)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x^2)}{4x^2}\right) \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x\sin(x^2)}{8x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{4}\right) = 0.$

c) $f(x) = \sin(x^{80}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{160n+80}}{(2n+1)!}$
x^{120} und x^{147} treten nicht auf, somit ist $f^{(120)}(0) = f^{(147)}(0) = 0.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1} = z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n,\quad z = \frac{1}{2}z + 34 \Longrightarrow z = 68$

Aufgabe 2 **a)** $x_1 = 1+\lambda,\quad x_2 = \lambda,\quad x_3 = \lambda,\quad x_1+x_2+x_3 = 0,\quad \Longrightarrow\ \lambda = -\frac{1}{3}$ und als Schnittpunkt erhalten wir $\mathbf{x} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.
Der Normalenvektor $(1,1,1)^T$ der Ebene E_1 und der Richtungsvektor $(1,1,1)^T$ der Gerade g_1 sind linear abhängig. Der Schnittwinkel ist somit $\frac{\pi}{2}$.

b) Der Ursprung $(0,0,0)$ erfüllt $x_1+x_2+x_3 = 0$. Der Abstand ist somit $d = 0$.

c) $$d = \frac{\left\|\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

d) $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\mu\\\nu\\\mu\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad 1+2\mu+\nu = 0,$$
$\Longrightarrow \nu = -1-2\mu$

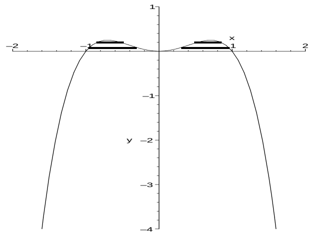
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + (-1-2\mu)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

e) Der Richtungsvektor $(1,1,1)^T$ der Geraden g_1 und der Richtungsvektor $(1,-2,1)^T$ der Geraden g_2 sind linear unabhängig. Weiter gilt

$$<\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right) >=< \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} >= 0$$

$\Longrightarrow$ die Geraden liegen in einer Ebene und sind nicht parallel. Es existiert somit ein Schnittpunkt und der Abstand ist $d = 0$.

Aufgabe 3 **a)** $f(x) = -x^4 + x^2 = -x^2(x^2-1) = 0$,
$\Longrightarrow x_0 = 0$ (doppelt), $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (einfach).
$f'(x) = -4x^3 + 2x = -2x(2x^2-1) = 0, \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 0,\ x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.



b) $|M| = 2\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 2\big[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\big]\Big|_0^1 = 2(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}) = \frac{4}{15}$

c) $T_6(x;0) = \sum\limits_{k=0}^{2} \frac{(-x^4+x^2)(-x^2)^k}{k!} = (x^2-x^4)(1-x^2+\frac{x^4}{2}+\mathcal{O}(x^6))$
$= x^2 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^6 + \mathcal{O}(x^8)$.

Konvergenzradius der Potenzreihe der e-Funktion und des Polynoms f ist ∞,
$\Longrightarrow$ Konvergenz der Taylorreihe von g auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 **a)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f_n(x))^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\arctan(\frac{x}{n})|^2 \le \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{x}{n}|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{n})^2 = x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
$\Longrightarrow$ Konvergenz nach Majorantenkritierium für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $|\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{n^{\frac{1}{4}}} f_n(x)\,dx| \le \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{n^{\frac{1}{4}}}|\arctan(\frac{x}{n})|\,dx \le \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{n^{\frac{1}{4}}}|\frac{x}{n}|\,dx$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_0^{n^{\frac{1}{4}}} x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big[\frac{x^2}{2}\big]\Big|_0^{n^{\frac{1}{4}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}} = 0$
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{n^{\frac{1}{4}}} f_n(x)\,dx = 0$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan(\frac{1}{n}) \ge \sum\limits_{n=11}^{\infty}\arctan(\frac{1}{n}) > \sum\limits_{n=11}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=11}^{\infty}\frac{1}{n}$, da $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$ für $n > 11$
$\Longrightarrow$ harmonische Reihe, Divergenz.

d) Sei $f(y) = \arctan y$ und $g(y) = y$, dann ist $f(0) = g(0)$ und $f'(y) < g'(y)$, da $\frac{1}{1+y^2} < 1$, für $y > 0$. Für $y < 0$ ist $f'(-y) < g'(-y)$, da $-\frac{1}{1+y^2} > -1$.
Die Behauptung gilt somit für $y \in \mathbb{R}$.