

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben seien die vier Punkte

$$A = (10, 0, 0), \quad B = (0, 10, 0), \quad C = (0, 0, 10), \quad D = (1, 4, 5).$$

- a) Zeige, A, B, C und D liegen in einer Ebene E . Bestimme diese Ebene in Parameterform und Hessescher Normalform.
- b) Bestimme den Abstand des Punktes $P = (1, 1, 1)$ von der Ebene E .
- c) Schneiden sich die Gerade durch A, B und die Gerade durch C, D ? Wenn ja, bestimme den Schnittpunkt.
- d) Liegt D innerhalb des Dreiecks ABC ? Begründung!

Aufgabe 2 (6 Punkte)

- a) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z(z - 4)(z^3 - 27) = 0.$$

- b) Bestimme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{3n} \frac{1}{x} dx.$$

- c) Bestimme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\cosh(x + n)}.$$

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}.$$

- a) Bestimme die Nullstellen, Extremstellen, Polstellen und skizziere $f(x)$.
- b) Bestimme

$$\int_0^1 f(x) dx$$

mittels Partialbruchzerlegung.

- c) Bestimme die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und deren Konvergenzradius.
- d) Bestimme $f^{(100)}(0)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Bestimme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{1 - \cos x}.$$

b) Für welche $\alpha \geq 0$ konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}?$$

c) Für welche $\alpha \geq 0$ konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \inf_{j=1, \dots, n} \left| \frac{\arctan\left(\frac{1}{j^2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{j}\right)} \right|?$$

d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)} x^n?$$

Hinweis: Alle Ergebnisse sind zu begründen.

In b) - d) kann verwendet werden, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{1 - \cos x} = \gamma > 0$ gilt, d.h. es gibt ein $N_0 > 0$, so dass $0 < \frac{\gamma}{2} < \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)} < 2\gamma$ für alle $n \geq N_0$ ist.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Dienstag, dem 10.10.2006, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html>

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, den 24.10.2006, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 30.10.06 bis 03.11.06.

Die allgemeine Klausureinsicht (siehe Aushang) ist am Mittwoch, den 8.11.2006, von 15.45 bis 17.15 Uhr im Seminarraum S 34 (Mathematikgebäude).