

**Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung  
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

i) 
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{k} + 1)^2}{k^2 + \sqrt{k^4 - 1}};$$

ii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

b) Bestimmen Sie die Reihendarstellung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x e^{-x}$$

um die Entwicklungsstelle  $x_0 = 1$  und berechnen Sie  $f^{(200)}(1)$ .

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} - \cos^2 x}{x};$$

ii) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^3)} - 1}{x(1 - \cos x)}.$$

b) Gegeben sei die Funktion

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x} \ln x.$$

i) Zeigen Sie:  $f$  ist auf  $[\frac{1}{e}, \infty)$  streng monoton wachsend und es gilt

$$f([\frac{1}{e}, e^2]) = [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e].$$

ii) Begründen Sie, dass die Umkehrfunktion  $f^{-1}: [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e] \rightarrow [\frac{1}{e}, e^2]$  im Punkt  $\sqrt{e}$  differenzierbar ist, und bestimmen Sie

$$f^{-1}(\sqrt{e}) \quad \text{sowie} \quad (f^{-1})'(\sqrt{e}).$$

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt;$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx;$

c)  $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} dx.$

*Hinweis zu c):* Schreiben Sie  $\cos x = \cos(\frac{x}{2} + \frac{x}{2})$  und verwenden Sie dann das passende Additionstheorem.

### Aufgabe 4 (10 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^x, & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

**Viel Erfolg!**

#### Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 13.10.2010, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

[www.math.kit.edu/iana1](http://www.math.kit.edu/iana1)

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 20.10.2010, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Daimler-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 25.10.2010 bis 29.10.2010 im Allianz-Gebäude 05.20.