Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2010
03.03.2010

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -4-\lambda & 6 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\big((-4-\lambda)(5-\lambda)+18\big) = (2-\lambda)\big(\lambda^2-\lambda-2\big) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1),$$

also ist -1 Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit 1 und 2 ist Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit 2. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(-1) = \operatorname{Kern}(A + I_3) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \},$$
$$E_A(2) = \operatorname{Kern}(A - 2I_3) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 6 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

Insbesondere hat der Eigenwert -1 die geometrische Vielfachheit 1 und 2 die geometrische Vielfachheit 2.

b) Wie in **a)** gesehen, stimmen für jeden Eigenwert von A geometrische und algebraische Vielfachheit überein. Daher ist A diagonalisierbar, d.h. es gibt eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Um ein solches S anzugeben, kann man in jedem Eigenraum eine Basis wählen und die Basisvektoren als Spalten in eine Matrix schreiben. Beispielsweise für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

weil in den ersten beiden Spalten von S Basisvektoren von $E_A(2)$ und in der dritten Spalte ein Basisvektor von $E_A(-1)$ stehen.

c) Sei $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AB = \mathbf{0}$ (Nullmatrix). Da 0 kein Eigenwert von A ist, ist A regulär. Multiplikation von $AB = \mathbf{0}$ mit A^{-1} von links führt auf $B = A^{-1}AB = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Also gibt es keine von der Nullmatrix verschiedene Matrix B mit $AB = \mathbf{0}$.

Aufgabe 2

a) Zweimalige Anwendung der Kettenregel zeigt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Gradient von f lautet

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^3 + xy^2 \\ x^2y + 6y - 6 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die erste Komponente von $\operatorname{grad} f(x,y)$ verschwindet genau dann, wenn $x(2x^2+y^2) = 0$ gilt, also wenn $x = 0$ oder $2x^2 + y^2 = 0$ ist. Da Letzteres nur für $x = 0$ und $y = 0$ erfüllt ist, ergibt sich $x(2x^2+y^2) = 0$ genau für $x = 0$.

Für $x = 0$ lautet die zweite Komponente von $\operatorname{grad} f(x,y)$: $6y - 6$. Genau für $y = 1$ ist diese $= 0$.

Damit ist $(0,1)$ der einzige kritische Punkt von f.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2+6 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ hat die beiden positiven Eigenwerte $1, 6$ und ist somit positiv definit. Daher besitzt f in $(0,1)$ ein lokales Minimum mit $f(0,1) = -3$.

b) Da f auf $\mathbb{R}^2$ stetig und $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt die Funktion f auf M ihr Maximum und Minimum an.

1. Schritt: Untersuchung von f auf $\operatorname{inn} M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$.

Wir haben im **a)**-Teil gesehen, dass f in $(0,1) \in \operatorname{inn} M$ ein lokales Minimum hat und keine weiteren lokalen Extremstellen auf $\mathbb{R}^2$ (und damit insbesondere auch auf $\operatorname{inn} M$) besitzt.

2. Schritt: Untersuchung von f auf $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$.

Wir verwenden die Multiplikatorenregel von Lagrange: Ist

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x,y) = x^2 + y^2 - 4,$$

definiert, dann gilt $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ sowie

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{rg} h'(x,y) < 1$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für $(x,y) \in S$ nicht vorkommt. Also gilt $\operatorname{rg} h'(x,y) = 1$ für alle $(x,y) \in S$.

Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + 3y^2 - 6y + \lambda(x^2+y^2-4).$$

Es gilt

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x^3 + xy^2 + 2\lambda x \\ x^2y + 6y - 6 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ ist äquivalent zu:

$$2x^3 + xy^2 + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$
$$x^2y + 6y - 6 + 2\lambda y = 0 \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{3}$$

1. Fall: $x = 0$. Dann ist stets (1) erfüllt. Aus Gleichung (3) folgt $y^2 = 4$, also $y = 2$ oder $y = -2$. Gleichung (2) ist im Fall $y = 2$ für $\lambda = -3/2$ und im Fall $y = -2$ für $\lambda = -9/2$ erfüllt.

2. Fall: $x \neq 0$. Gleichung (1) lautet dann $2x^2 + y^2 + 2\lambda = 0$. Setzt $x^2 = 4 - y^2$, was aus (3) folgt, hierin ein, so ergibt sich

$$2(4 - y^2) + y^2 + 2\lambda = 0 \iff 8 - y^2 + 2\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{y^2 - 8}{2}.$$

Einsetzen in (2) ergibt

$$\begin{aligned} x^2y + 6y - 6 + (y^2 - 8)y = 0 &\overset{(3)}{\iff} (4 - y^2)y + 6y - 6 + (y^2 - 8)y = 0 \\ &\iff 2y - 6 = 0 \iff y = 3. \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu (3).

Fazit: $(0, 2)$ und $(0, -2)$ sind die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf S.

Ein Vergleich der Funktionswerte

$$f(0, 2) = 0, \qquad f(0, -2) = 24$$

zeigt unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus dem 1. Schritt

$$\min_{(x,y)\in M} f(x, y) = -3 \qquad \text{und} \qquad \max_{(x,y)\in M} f(x, y) = 24.$$

Aufgabe 3

a) Da alle partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig sind, gilt $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Die Menge G ist offen und konvex, also ein Gebiet. Ferner besteht ∂G aus endlich vielen regulären Kurven (Teil einer Parabel und einer Geraden). Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \iint_G \big(\partial_x(2xy + x) - \partial_y(y^2)\big)\, d(x, y) = \iint_G (2y + 1 - 2y)\, d(x, y) = \iint_G 1\, d(x, y) \\ &= \int_{-3}^{3} \int_{x^2-4}^{5} 1\, dy\, dx = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx = 36. \end{aligned}$$

b) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $\vec{v}$ ein C^1-Vektorfeld ist, stellt $\vec{v}$ genau dann ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ dar, wenn die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind.

Ist $\vec{v}(x, y) =: \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix}$ gesetzt, so gilt für jedes $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial_2 v_1(x, y) &= 2xg(xy) + (1 + 2xy)g'(xy)x, \\ \partial_1 v_2(x, y) &= 4xg(xy) + 2x^2 g'(xy)y. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\partial_2 v_1(x, y) = \partial_1 v_2(x, y) \iff 2xg(xy) + xg'(xy) = 4xg(xy) \iff xg'(xy) = 2xg(xy).$$

Dies ist genau dann erfüllt, falls $g'(t) = 2g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, also genau für $g(t) = Ce^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Die Forderung $g(0) = 2$ führt auf $C = 2$.

Fazit: Ist $g(t) := 2e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, gesetzt, so gilt $g(0) = 2$ und $\vec{v}$ stellt ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ dar.

Nun berechnen wir ein zugehöriges Potential $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wegen $\partial_y f(x, y) = 4x^2e^{2xy} + 1$ gilt $f(x, y) = 2xe^{2xy} + y + h(x)$ für eine differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_x f(x, y) = 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} + h'(x)$ und $\partial_x f(x, y) = v_1(x, y)$ folgt $h'(x) = 0$; dies ist beispielsweise für $h \equiv 0$ erfüllt. Somit gilt $\nabla f = \vec{v}$ für $f(x, y) = 2xe^{2xy} + y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.