

**Bachelor–Modulprüfung**  
**Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen**  
**Elektroingenieurwesen und Geodäsie**

**Aufgabe 1 (6 + 4 = 10 Punkte)**

- a) Im Vektorraum  $C^1(\mathbb{R})$  der auf  $\mathbb{R}$  einmal stetig differenzierbaren Funktionen seien die Funktionen  $b_1, b_2, b_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$b_1(x) = \sin^2(x), \quad b_2(x) = \sin(x) \cos(x), \quad b_3(x) = \cos^2(x).$$

Es sei  $V := \text{Lin}(b_1, b_2, b_3)$ .

- i) Begründen Sie, dass  $B := (b_1, b_2, b_3)$  eine Basis von  $V$  bildet.
- ii) Zeigen Sie, dass durch  $L: V \rightarrow V, v \mapsto 2v' + v$  eine lineare Abbildung definiert wird, und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von  $L$  bezüglich der Basis  $B$ .
- iii) Berechnen Sie unter Verwendung der Darstellungsmatrix aus Teil ii)

$$(L(w))(x) \quad \text{für} \quad w(x) := (\sin(x) + \cos(x)) \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- b) Geben Sie eine Matrix  $A$  an, die zum Eigenwert  $\lambda_1 = 2$  den Eigenvektor  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und zum Eigenwert  $\lambda_2 = -1$  den Eigenvektor  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  besitzt.

**Aufgabe 2 (5 + 5 = 10 Punkte)**

- a) Gegeben seien die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto xy + z^3$$

und

$$\vec{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u^2 - v + 2 \\ \sin(u) \\ \cos(v) \end{pmatrix}.$$

- i) Berechnen Sie  $f'$  und  $\vec{g}'$ .
- ii) Ermitteln Sie die Ableitung von  $f \circ \vec{g}$ .
- iii) Berechnen Sie die Richtungsableitung  $(D_{\vec{w}}\vec{g})(1, 2)$  für  $\vec{w} := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

- b) Bestimmen Sie Maximum und Minimum von

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto 2x + y + z$$

unter den beiden Nebenbedingungen  $x^2 + y^2 = 1$  und  $y = z$ .

### Aufgabe 3 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Sei  $D \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$  die beschränkte Menge, die von den Kurven  $y = 0$ ,  $y^2 = x$  und  $y = 2 - x$  berandet ist.

i) Skizzieren Sie  $D$ .

ii) Berechnen Sie den Wert von

$$\iint_D xy \, d(x, y).$$

b) In Abhängigkeit des reellen Parameters  $\alpha$  sei das Vektorfeld  $\vec{v}_\alpha$  definiert durch

$$\vec{v}_\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(z) \\ \alpha y z \\ x \cos(z) + y^2 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ , für die  $\vec{v}_\alpha$  ein Potentialfeld auf  $\mathbb{R}^3$  ist, und geben Sie für diese  $\alpha$  jeweils ein zugehöriges Potential an.

ii) Die Kurve  $\gamma$  sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}: [0, \frac{3}{2}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_\gamma \vec{v}_0 \cdot d\vec{s} \quad \text{und} \quad \int_\gamma \vec{v}_2 \cdot d\vec{s}.$$

*Hinweis:* Eine Stammfunktion von  $\cos^2(t)$  ist gegeben durch  $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cos(t)\sin(t)$ .

**Viel Erfolg!**

#### Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 23.03.2011, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

[www.math.kit.edu/iana1](http://www.math.kit.edu/iana1)

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 13.04.2011, von 14:00 bis 16:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 18.04.2011 bis 21.04.2011 im Allianz-Gebäude 05.20.