

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda) - (\lambda-1)) - ((1-\lambda) - (\lambda-1)) \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)((2-\lambda)+1) - (1+1)) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda-4).\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A , also 1, 4. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$\begin{aligned}E_A(1) &= \text{Kern}(A - I_3) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_A(4) &= \text{Kern}(A - 4I_3) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

b) Da $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Aus dem gleichen Grund gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Um ein solches S zu bestimmen, muss man eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von A angeben.

Setze

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_A(4) \quad \text{sowie} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_A(1).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ symmetrisch ist, stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander, also gilt $v_1 \perp v_2$. Ist

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

definiert, so sind $v_3 \perp v_1$ und $v_3 \perp v_2$. Wegen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ folgt, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind und somit eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden. Aufgrund von $v_1 \in E_A(4)$, $\dim E_A(4) = 1$ und $\dim E_A(1) = 2$ ergibt sich $E_A(1) = \text{lin}\{v_2, v_3\}$.

Folglich ist eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von A gegeben durch

$$\left\{ \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \frac{1}{\|v_2\|} v_2, \frac{1}{\|v_3\|} v_3 \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Deshalb ist die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

orthogonal und es gilt

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Zweimalige Anwendung der Kettenregel zeigt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Gradient von f lautet

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6x + y^2 \\ 2xy - 2y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die zweite Komponente von $\text{grad } f(x, y)$ verschwindet genau dann, wenn $y(x - 1) = 0$ gilt, also wenn $y = 0$ oder $x = 1$ ist.

Im Fall $y = 0$ ergibt sich für die erste Komponente $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Genau für $x = 0$ oder $x = 2$ ist diese = 0.

Im Fall $x = 1$ ergibt sich für die erste Komponente $3 - 6 + y^2 = -3 + y^2$. Genau für $y = \sqrt{3}$ oder $y = -\sqrt{3}$ ist diese = 0.

Damit sind $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ alle kritischen Punkte von f .

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 6 & 2y \\ 2y & 2x - 2 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $-6, -2$ und ist somit negativ definit. Daher besitzt f in $(0, 0)$ ein lokales Maximum mit $f(0, 0) = 0$.

$H_f(2, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $6, 2$ und ist somit positiv definit. Daher besitzt f in $(2, 0)$ ein lokales Minimum mit $f(2, 0) = -4$.

$H_f(1, \sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil $\det H_f(1, \sqrt{3}) = -12 < 0$ gilt. Daher liegt in $(1, \sqrt{3})$ ein Sattelpunkt von f vor.

$H_f(1, -\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil $\det H_f(1, -\sqrt{3}) = -12 < 0$ gilt. Daher liegt in $(1, -\sqrt{3})$ ein Sattelpunkt von f vor.

- b) Nach der Kettenregel ist g auf \mathbb{R}^2 stetig differenzierbar, insbesondere auch stetig. Da S abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt g auf S Maximum und Minimum an. Zu deren Bestimmung verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange: Ist

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = x^2 + y^2 - 8,$$

definiert, dann gilt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$ sowie

$$h'(x, y) = (2x \quad 2y)$$

und $\text{rg } h'(x, y) < 1$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für $(x, y) \in S$ nicht vorkommt. Also gilt $\text{rg } h'(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in S$.

Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, L(x, y, \lambda) = g(x, y) + \lambda h(x, y) = xy - 2(x^2 + y^2) + \lambda(x^2 + y^2 - 8).$$

Es gilt

$$\text{grad } L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} y - 4x + 2\lambda x \\ x - 4y + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 8 \end{pmatrix}$$

und $\text{grad } L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$ ist äquivalent zu:

$$y - 4x + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$

$$x - 4y + 2\lambda y = 0 \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 - 8 = 0 \tag{3}$$

Addition von (1) und (2) ergibt

$$(x + y) - 4(x + y) + 2\lambda(x + y) = 0,$$

was genau für $x + y = 0$ oder $-3 + 2\lambda = 0$ erfüllt ist.

1. Fall: $x = -y$. Aus Gleichung (3) folgt dann $x^2 = 4$, also $x = 2$ oder $x = -2$. Damit sind $(2, -2)$ und $(-2, 2)$ Kandidaten für Extremstellen.

2. Fall: $\lambda = 3/2$. Setzt man dies in Gleichung (1) ein, so erhält man

$$y - 4x + 3x = 0, \quad \text{also } x = y.$$

Hiermit ergibt sich aus Gleichung (3): $x^2 = 4$, also $x = 2$ oder $x = -2$, so dass $(2, 2)$ und $(-2, -2)$ weitere Kandidaten für Extremstellen sind.

Ein Vergleich der Funktionswerte

$$g(2, 2) = g(-2, -2) = -12, \quad g(-2, 2) = g(2, -2) = -20$$

zeigt

$$\min_{(x,y) \in S} g(x, y) = -20 \quad \text{sowie} \quad \max_{(x,y) \in S} g(x, y) = -12.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

- a) Mit $\vec{v}(x, y, z) =: \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix}$ gelten

$$\partial_1 v_2(x, y, z) = 2xe^{x^2+z^2} \cos(y) = \partial_2 v_1(x, y, z),$$

$$\partial_1 v_3(x, y, z) = 4xze^{x^2+z^2} \sin(y) + \frac{e^x}{1+z^2} = \partial_3 v_1(x, y, z),$$

$$\partial_2 v_3(x, y, z) = 2ze^{x^2+z^2} \cos(y) = \partial_3 v_2(x, y, z).$$

Da \mathbb{R}^3 einfach zusammenhängend ist, ist \vec{v} ein Potentialfeld auf \mathbb{R}^3 .

Wir berechnen ein zugehöriges Potential $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen $\partial_x f(x, y, z) = 2xe^{x^2+z^2} \sin(y) + e^x \arctan(z)$ gilt $f(x, y, z) = e^{x^2+z^2} \sin(y) + e^x \arctan(z) + h(y, z)$ für eine differenzierbare Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Aus $\partial_y f(x, y, z) = v_2(x, y, z)$ und $\partial_y f(x, y, z) = e^{x^2+z^2} \cos(y) + \partial_y h(y, z)$ folgt $\partial_y h(y, z) = 2$, also $h(y, z) = 2y + g(z)$ für ein geeignetes $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Damit ist $f(x, y, z) = e^{x^2+z^2} \sin(y) + e^x \arctan(z) + 2y + g(z)$. Die Gleichungen $\partial_z f(x, y, z) = v_3(x, y, z)$ und $\partial_z f(x, y, z) = 2ze^{x^2+z^2} \sin(y) + \frac{e^z}{1+z^2} + g'(z)$ führen auf $g'(z) = 0$; dies ist beispielsweise für $g \equiv 0$ erfüllt. Somit gilt $\nabla f = \vec{v}$ für $f(x, y, z) = e^{x^2+z^2} \sin(y) + e^x \arctan(z) + 2y$. Deshalb ergibt sich

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = f(\gamma(1/2)) - f(\gamma(0)) = f(0, \pi/2, 1) - f(0, 0, 0) = e + \arctan(1) + \pi = e + \frac{5\pi}{4}.$$

b) Offenbar ist $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Der Divergenzsatz liefert

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, d\sigma = \iiint_Z (\nabla \cdot \vec{v}) \, d(x, y, z).$$

Es gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x, y, z) = y^2 + x^2$. Mit Zylinderkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$ (wobei $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [-1, 2]$) erhält man

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, d\sigma &= \iiint_Z (x^2 + y^2) \, d(x, y, z) = \iiint_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [-1,2]} ((r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2) r \, d(r, \varphi, z) \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^{2\pi} r^3 \, d\varphi \, dz \, dr = 2\pi \int_0^1 \int_{-1}^2 r^3 \, dz \, dr = 6\pi \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$