Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2010
20.09.2010

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die zum linearen Gleichungssystem $A_\alpha \vec{x} = \vec{b}$ gehörende erweiterte Matrix $(A, \vec{b})$ und bringen diese durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform. (Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2, Z_3 bezeichnet)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha+1 & 3\alpha & 2\alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 0 & 2\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 3\alpha+3 & -2\alpha & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha+1 & 3\alpha & 2\alpha & 1 \\ 0 & -1 & -3\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+2 & 6\alpha+3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + (\alpha+2) Z_2]{Z_1 \to Z_1 + (\alpha+1) Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3\alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & -1 & -3\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(1-\alpha^2) & 0 & 3 \end{array}\right).$$

An dieser Stelle ist klar, dass A_α im Fall $\alpha \in \{-1, 1\}$ den Rang 2 und im Fall $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ den Rang 3 hat. Außerdem liest man $\operatorname{rang}(A_\alpha, \vec{b}) = 3$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ab. Deshalb ist das lineare Gleichungssystem $A_\alpha \vec{x} = \vec{b}$ im Fall $\alpha \in \{-1, 1\}$ unlösbar. Für alle anderen α lässt sich obiges Verfahren fortsetzen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3\alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & -1 & -3\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(1-\alpha^2) & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{3(1-\alpha^2)} Z_3]{Z_2 \to -Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3\alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 3\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-\alpha^2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_1 \to Z_1 + 3\alpha^2 Z_3]{Z_2 \to Z_2 - 3\alpha Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2\alpha & 1 + \frac{3\alpha^2}{1-\alpha^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-3\alpha}{1-\alpha^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-\alpha^2} \end{array}\right).$$

Somit erhält man im Fall $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ als Lösungsmenge

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A_\alpha \vec{x} = \vec{b}\} = \{\lambda \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\alpha^2} \begin{pmatrix} 1+2\alpha^2 \\ -3\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

b) Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & -10 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(2+\lambda) \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(2+\lambda)\big((5-\lambda)(3-\lambda) - 3\big) = -(2+\lambda)\big(\lambda^2 - 8\lambda + 12\big) = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-6).$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $-2, 2, 6$. Da A drei verschiedene Eigenwerte besitzt und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, gibt es drei linear unabhängige Eigenvektoren von A. Deshalb ist die 3×3-Matrix A diagonalisierbar.

Aufgabe 2

a) Zweimalige Anwendung der Kettenregel zeigt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Gradient von f lautet

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3e^{-x^2} - 2x(x^4+y^2)e^{-x^2} \\ 2ye^{-x^2} \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die zweite Komponente von $\operatorname{grad} f(x,y)$ verschwindet genau dann, wenn $y = 0$ gilt. Im Fall $y = 0$ lautet die erste Komponente von $\operatorname{grad} f(x,y)$: $(4x^3 - 2x^5)e^{-x^2} = 2x^3(2-x^2)e^{-x^2}$. Diese ist $= 0$ genau für $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$.

Damit sind $(0,0)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$ alle kritischen Punkte von f.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (12x^2 - 10x^4 - 2y^2)e^{-x^2} - 2xD_1f(x,y) & -4xye^{-x^2} \\ -4xye^{-x^2} & 2e^{-x^2} \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$H_f(\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} -16e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $-16e^{-2} < 0, 2e^{-2} > 0$ und ist somit indefinit. Daher liegt in $(\sqrt{2},0)$ ein Sattelpunkt von f vor.

$H_f(-\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} -16e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $-16e^{-2} < 0, 2e^{-2} > 0$ und ist somit indefinit. Daher liegt in $(-\sqrt{2},0)$ ein Sattelpunkt von f vor.

Da $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte $0, 2$ hat, ist das Kriterium aus der Vorlesung nicht anwendbar. Es gilt jedoch $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) \geqslant 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Folglich liegt im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum von f vor.

b) Definiere die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto xz - y + z^3 + 2$. Dann ist f auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar mit

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} z & -1 & x+3z^2 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Es gilt $f(1,0,-1) = -1 - 1 + 2 = 0$ und

$$\partial_z f(x,y,z) = x + 3z^2\,, \qquad \text{also} \qquad \partial_z f(1,0,-1) = 4 \neq 0\,.$$

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt. Danach gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(1,0)$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $h\colon U \to \mathbb{R}$ mit $h(1,0) = -1$ und $f(x,y,h(x,y)) = 0$ für alle $(x,y) \in U$. Dies entspricht gerade der behaupteten Auflösbarkeit der Gleichung nach z im Punkt $(1,0,-1)$. Außerdem liefert der Satz über implizit definierte Funktionen für die Ableitung von g in $(1,0)$

$$g'(1,0) = -\frac{1}{\partial_z f(x,y,g(x,y))}\,\partial_{(x,y)} f\big(x,y,g(x,y)\big)\Big|_{(x,y)=(1,0)} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

a) Mit Zylinderkoordinaten lässt sich G schreiben als

$$G = \big\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \mid \varphi \in [0, 2\pi],\ r \in [0, \sqrt{3}],\ z \in [\sqrt{1+r^2}, 2]\big\}.$$

Die Transformationsformel liefert nun

$$\begin{aligned}\iiint\limits_G z\, d(x,y,z) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\sqrt{1+r^2}}^{2} z\, r\, dz\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_{z=\sqrt{1+r^2}}^{z=2} dr\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r(3-r^2)\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\tfrac{3}{2}r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=\sqrt{3}} d\varphi \\ &= \frac{9}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{9\pi}{4}.\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{3(x^2+y^2)}\end{pmatrix} \mid \sqrt{3} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2\sqrt{3},\ x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

und nach Einführung von Polarkoordinaten $x = u\cos v$, $y = u\sin v$ erhält man

$$\mathcal{F} = \big\{\vec{g}(u,v) \mid (u,v) \in U\big\}$$

mit

$$\vec{g}(u,v) := \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ \sqrt{3}\,u\end{pmatrix}, \qquad U := [\sqrt{3}, 2\sqrt{3}] \times [0, 2\pi].$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} I(\mathcal{F}) &= \iint\limits_{\mathcal{F}} do = \iint\limits_U \big\|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\big\|\, d(u,v) \\ &= \iint\limits_U \left\|\begin{pmatrix}\cos v \\ \sin v \\ \sqrt{3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0\end{pmatrix}\right\| d(u,v) = \iint\limits_U \left\|\begin{pmatrix} -\sqrt{3}\,u\cos v \\ -\sqrt{3}\,u\sin v \\ u\end{pmatrix}\right\| d(u,v) \\ &= \iint\limits_U \sqrt{3u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2}\, d(u,v) = \iint\limits_U 2u\, d(u,v) \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} 2u\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\left[u^2\right]_{u=\sqrt{3}}^{u=2\sqrt{3}} dv = 9\int_0^{2\pi} dv = 18\pi.\end{aligned}$$