

$$\underline{A1:} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 x_j \vec{e}_j, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 u_j \vec{e}_j$$

$$S, T \text{ linear gibt } S(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+x_2 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$$a) \quad \underline{(S \circ T)(\vec{x})} \stackrel{(1)}{=} S(x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3) \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

b)  $S \circ T$  ist linear:  $S \circ T$  ist injektiv, falls aus  $S \circ T(\vec{x}) = \vec{0}$

folgt:  $\vec{x} = \vec{0}$ . Also sei  $(S \circ T)(\vec{x}) \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Man

sieht unmittelbar:  $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 : \vec{x} = \vec{0} \checkmark$

$S \circ T$  ist injektiv

$$\vec{x} = (S \circ T)^{-1}(\vec{u}) \Leftrightarrow (S \circ T)(\vec{x}) \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{(S \circ T)^{-1}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 - u_3 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}}$$

$$c) \quad (T - \text{id})(\vec{x}) \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_1 + x_2 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$(T - \text{id})^2(\vec{x}) = (T - \text{id})(0, x_1, x_1 + x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -0 \\ x_1 & -x_1 \\ 2x_1 + x_2 & -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$(T - \text{id})^3(\vec{x}) = (T - \text{id})(0, 0, x_1) = \begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & -0 \\ x_1 & -x_1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{(T - \text{id})^k(\vec{x}) = \vec{0}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 3.}$$

$$\underline{A1} \quad d1 \quad S\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) \\ = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

$\lambda = 1$  ist doppelter EW,  $\lambda = -1$  ist einfacher EW

EV zu  $\lambda = 1$ :  $x_1 = x_3 \Rightarrow$  Basis des zugehörigen Eigenraums  
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

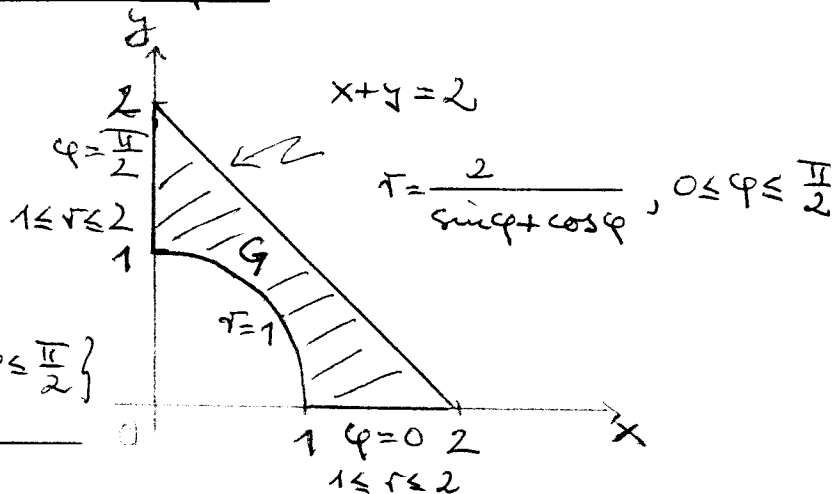
EV zu  $\lambda = -1$ :  $x_2 = 0, x_1 = -x_3 \Rightarrow$  Basis des zugehörigen Eigenraums  
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

A2a)

Mit  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ 

ist

$$G = \left\{ (r, \varphi) \mid 1 \leq r \leq \frac{2}{\sin \varphi + \cos \varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



Also:

$$\iint_G \frac{x+y}{x^2+y^2} d(x,y) = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=1}^{\frac{2}{\sin \varphi + \cos \varphi}} \frac{1}{r} (\cos \varphi + \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = \underline{\underline{\pi - 2}}$$

A2b)  $f$  ist als Integral über eine stetige Funktion mit stetig diff'baren Grenzen stetig diff'bar (Kettenregel, Fundamentalsatz)

Es gilt  $\underline{\underline{D_{\vec{v}} f(x,y) = f'(x,y)(\vec{v}) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{v}}}$

$$D_1 f(x,y) = 3x^2 e^{(x^2+y^2)^2} - \sin y e^{x^2 \sin^2 y}$$

$$D_2 f(x,y) = 2y e^{(x^2+y^2)^2} - x \cos y e^{x^2 \sin^2 y}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_{\vec{v}} f(x,y) \Big|_{\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = (3x^2 + 2y) e^{(x^2+y^2)^2} - (\sin y + x \cos y) e^{x^2 \sin^2 y}}}$$

A3 a) gesucht sind die Punkte  $\vec{r}(u_0, v_0) \in F$ , in denen der Normalenvektor parallel zu  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  (dem Normalenvektor der Ebene) ist:

$$\nabla_1 \vec{r}(u_0, v_0) \times \nabla_2 \vec{r}(u_0, v_0) = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_0 - v_0 \\ -u_0 - v_0 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = -1 \\ u_0 - v_0 = -2 \\ u_0 + v_0 = +1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_0 = -\frac{1}{2} \\ v_0 = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$\vec{r}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

A36)

$$\iint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \iiint_G \nabla \cdot \vec{v} \, dV \quad (\text{Gauß Integralsatz})$$

$$= 5 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \\ x+y+z=0}} z \, dz \, dx \, dy$$

Polarkoordinaten  
in  $xy$ -Ebene

$$\downarrow \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z \, dz \, r \, dr \, d\varphi$$

$\varphi=0 \quad r=0 \quad z=0$

$$= \frac{5}{2} 2\pi \int_{r=0}^a (a^2 - r^2) r \, dr = 5\pi \left( \frac{1}{2} a^4 - \frac{1}{4} a^4 \right) = \underline{\underline{\frac{5\pi}{4} a^4}}$$