Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2013
19.09.2013

Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 **(10 Punkte)** (2+4+2+2)
Es liegt das lineare Gleichungssystem

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n}(j-l)x_j = 1, \; l = 1,2,\cdots,n$$

für $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vor.

a) Schreiben Sie $(*)$ als Matrixgleichung für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$(**) \quad A_n\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Elemente $(A_n)_{rs}$ von A_n an.

b) Im Fall $n = 4$ ist die allgemeine Lösung von $(**)$ zu berechnen.

c) Geben Sie $\text{rang}(A_4)$, $\text{Kern}(A_4)$, $\dim \text{Kern}(A_4)$, $\dim \text{Bild}(A_4)$ an.

d) Ist A_3 diagonalisierbar?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)** (5+5)

a) Berechnen Sie $f(x, y, z)$ so, dass

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ f(x,y,z) \\ e^z \sin y \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^3$ ein Potentialfeld ist und die Bedingung $\vec{v}(0,y,0) = \begin{pmatrix} \sin y \\ \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}$ erfüllt.

b) Die Kurve γ ist durch $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, gegeben. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

wobei $\vec{v}$ das in a) ermittelte Vektorfeld ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es ist die Fläche

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1, z \geq 0\}$$

gegeben. Skizzieren Sie H und berechnen Sie den Inhalt von H.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab **11.10.2013**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2013s/`

im Internet.
Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den **23.10.2013**, von 16.00 Uhr bis 18.00 Uhr im HS a.F. (Geb. 50.35) statt.
Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **28.10.2013** bis **31.10.2013** im Allianzgebäude 05.20 (3.OG.).

Aufgabe 1

a) $(A_n\vec{x})_r = \sum_{s=1}^{n} (A_n)_{rs} x_s$

Aufgabenstellung $\overset{!}{=} \sum_{s=1}^{n} (s-r)x_s \qquad r = 1,2,\dots,n$

Man liest ab: $\underline{(A_n)_{rs} = s-r}$, $r,s = 1,\dots,n$

Die (n,n)-Matrix A_n in $(*)$ ist: $\underline{A_n = (s-r)_{r,s=1,\dots,n}}$

b) $A_4\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ wird auf Zeilennormalform

transformiert: $\underline{x_1 = x_3 + 2x_4 - 1}$
$\underline{x_2 = -2x_3 - 3x_4 + 1}$

Man liest ab: $\vec{x}_{h_1} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{x}_{h_2} = \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$ sind eine Basis für $\text{Kern}(A_4)$.

$\vec{x}_p = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ ist eine Lösung von $A_4\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Die allgemeine Lösung von $A_4\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist

$\underline{\vec{x}_{allg} = c_1\vec{x}_{h_1} + c_2\vec{x}_{h_2} + \vec{x}_p}$ mit beliebigen Konst c_1, c_2

c) Aus b) liest man ab:

$\text{rang}(A_4) = 2 = \dim \text{Bild}(A_4)$, $\text{Kern}(A_4) = \text{Lin}(\vec{x}_{h_1}, \vec{x}_{h_2})$,

$\dim \text{Kern}(A_4) = 2$

noch Aufgabe 1

d) $\det(A_3 - \lambda E_3) = 0 = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)[\lambda^2 + 6]$

A_3 hat <u>drei verschiedene</u> EW und damit drei l.u. EV: <u>A_3 ist diagonalisierbar.</u>

Aufgabe 2

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ist auf $\mathbb{R}^3$ (einfach zshgd) ein Potentialfeld

$\iff D_j v_k = D_k v_j \quad (j,k = 1,2,3)$ auf $\mathbb{R}^3$

$D_3 v_1 = D_1 v_3 \quad : \quad 0 = 0 \checkmark$

$D_2 v_1 = D_1 v_2 \quad : \quad e^x \cos y = D_1 f(x,y,z) \quad \underline{(1)}$

$D_2 v_3 = D_3 v_2 \quad : \quad e^z \cos y = D_3 f(x,y,z) \quad \underline{(2)}$

$\underline{(1)} \Rightarrow f(x,y,z) = e^x \cos y + h(y,z) \Rightarrow D_2 h(y,z) = e^z \cos y$

h beliebig

$\Rightarrow h(y,z) = e^z \cos y + g(y) \quad$, g beliebig

$\Rightarrow f(x,y,z) = (e^x + e^z) \cos y + g(y)$. Aus $f(0,y,0) = \cos y$

folgt $g(y) = -\cos y$. Also $\underline{f(x,y,z) = (e^x + e^z - 1)\cos y}$

b) $\vec{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ist $\phi = \phi(x,y,z)$ ein Potential

für $\vec{v}$, so gilt $\underline{\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \phi(\frac{\pi}{2}, 1, 0) - \phi(0,0,1)} \quad \overline{(*)}$

Berechnung von ϕ: $D_1 \phi = v_1 = e^x \sin y \Rightarrow \phi = e^x \sin y + \lambda(y,z)$

$D_2 \phi = v_2 = (e^x + e^z - 1)\cos y = e^x \cos y + D_1 \lambda(y,z)$

$\Rightarrow \lambda(y,z) = (e^z - 1)\sin y + \rho(z)$

$\Rightarrow \phi(x,y,z) = (e^x + e^z - 1)\sin y + \rho(z)$

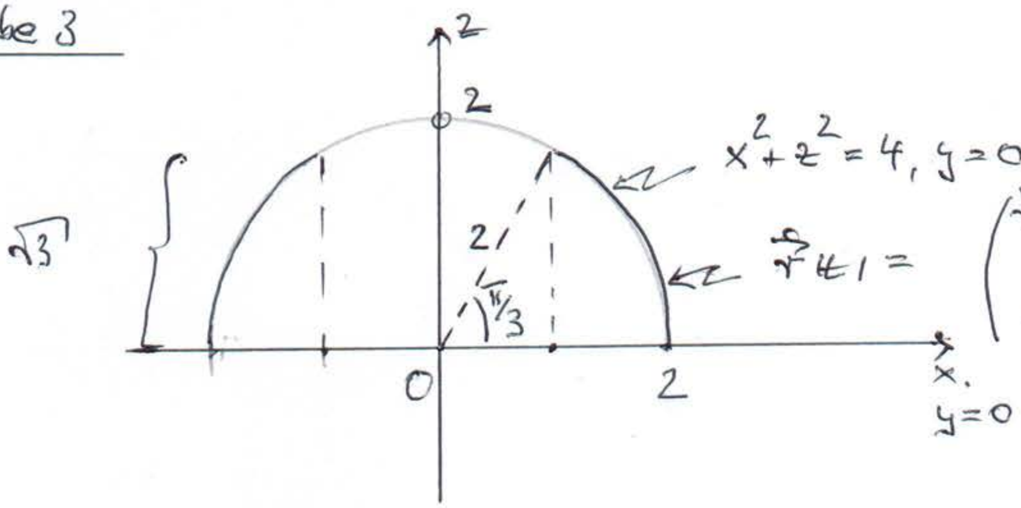
$D_3 \phi = e^z \sin y + \rho'(z) \overset{!}{=} v_3 = e^z \sin y \Rightarrow \rho(z) = \text{konst.}$

$\Rightarrow \phi(x,y,z) = (e^x + e^z - 1)\sin y + c$, c konst.

$\overline{(*)} \Rightarrow \underline{\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = e^{\frac{\pi}{2}} \sin 1}$

HM II ETIT Herbst 2013 . 19.9.2013 Lösungen

Aufgabe 3



$x^2+z^2=4,\ y=0$

$\vec r(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{4-t^2} \\ 0 \\ t \end{pmatrix},\ 0 \le t \le \sqrt{3}$

$\vec r(t)$ rotiert um die z-Achse:

$$\underline{I(H)} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x(t)\sqrt{x'(t)^2+z'(t)^2}\,dt \quad \text{mit } x(t)=\sqrt{4-t^2},\ z(t)=t$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} 2\,dt = \underline{4\pi\sqrt{3}}$$

oder: Mit Kugelkoordinaten: $H = \left\{ \vec r(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi\cos\vartheta \\ 2\sin\varphi\cos\vartheta \\ 2\sin\vartheta \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{3},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$

$$\| D_1 \vec r(\varphi,\vartheta) \times D_2 \vec r(\varphi,\vartheta) \| = 4\cos\vartheta$$

$$\Rightarrow\ I(H) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{3}} 4\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 8\pi\sin\frac{\pi}{3} = \underline{4\pi\sqrt{3}}$$

oder: Mit kartesischen Koordinaten

$$H = \left\{ \vec r(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{4-x^2-y^2} \end{pmatrix} \,\middle|\, 1 \le x^2+y^2 \le 4 \right\}$$

$$\| (D_1\vec r \times D_2 \vec r)(x,y) \| = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \Rightarrow I(H) = \iint_{1 \le x^2+y^2 \le 4} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,d(x,y)$$

$$= 2\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}}\,r\,dr\,d\varphi = \underline{4\pi\sqrt{3}}$$