UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

05.04.2000
Frühjahr 2000

DIPLOM–VORPRÜFUNG

zur Höheren Mathematik für Elektroingenieure und Physiker

2. KLAUSUR

1. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist die von einem reellen Parameter α abhängige Matrix

$$A_\alpha = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha & -5 & 2 \\ -5 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} .$$

a) Zeigen Sie, daß der Vektor $\vec{a} = (-1,1,0)^T$ ein Eigenvektor von A_α ist, und geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.

b) Berechnen Sie alle α, für die auch der Vektor $\vec{b} = (1,1,2)^T$ ein Eigenvektor von A_α ist, und geben Sie den jeweiligen Eigenwert an.

c) Berechnen Sie für $\alpha = 1$ eine Orthogonalmatrix S, so daß $S^T A_1 S = D$ Diagonalgestalt hat, und geben Sie D an.

d) Geben Sie alle Eigenwerte der Matrix $B = A_1 + E$ an, wobei E die Einheitsmatrix ist.

2. Aufgabe (10 Punkte):

Bezüglich der Basis $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ ist eine lineare Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{f}(\vec{b}_1) = 5\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 \quad , \quad \vec{f}(\vec{b}_2) = 11\vec{b}_1 - 4\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3 \quad , \quad \vec{f}(\vec{b}_3) = -3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3$$

gegeben.

a) Geben Sie die Abbildungsmatrix A von $\vec{f}$ bezüglich der Basis B an.

b) Die Vektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ sind durch

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_1 + (\alpha+1)\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3 \quad , \quad \vec{c}_2 = -\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3 \quad , \quad \vec{c}_3 = -2\vec{b}_1 - \alpha\vec{b}_2 - \alpha\vec{b}_3$$

gegeben, wobei $\vec{c}_1$ und $\vec{c}_3$ von dem reellen Parameter α abhängen. Geben Sie alle α an, für die diese Vektoren eine Basis $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ bilden.

c) Sei nun $\alpha = -1$. Geben Sie die Abbildungsmatrix von $\vec{f}$ bezüglich der Basis C an.

d) Untersuchen Sie $\vec{f}$ auf Injektivität, und geben Sie gegebenenfalls unter Nennung der von Ihnen gewählten Basis zwei verschiedene Vektoren an, die durch $\vec{f}$ auf denselben Vektor abgebildet werden.

3. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben sind die Gleichungen

$$(x+1)^2 - y + z^3 \cosh z - 1 = 0 \qquad (1)$$
$$x + xe^y + z = 0 \qquad (2)$$

a) Zeigen Sie, daß durch die beiden Gleichungen (1) und (2) in einer Umgebung des Punktes $z = 0$ zwei Funktionen $x = x(z)$ und $y = y(z)$ mit $x(0) = y(0) = 0$ implizit definiert sind.

b) Sei $\vec{g}(z) = (x(z), y(z))^T$, wobei $x(z)$ und $y(z)$ die implizit definierten Funktionen aus a) sind. Berechnen Sie $\vec{g}\,'(0)$, und geben Sie die Taylor-Entwicklung 1. Ordnung von $\vec{g}(z)$ um $z_0 = 0$ an.

c) Betrachten Sie im folgenden nur Gleichung (1). Welche der Auflösungen $x = X(y,z)$, $y = Y(x,z)$, $z = Z(x,y)$ existieren in einer Umgebung des Punktes $(0,0,0)$? (Begründung!)

4. Aufgabe (10 Punkte):

Durch die Ungleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \quad \text{und} \quad z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}$$

ist im $\mathbb{R}^3$ ein beschränkter Körper K gegeben.

a) Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der xz-Ebene.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \vec{N}_0 \, d\omega \quad (\vec{N}_0 : \text{äußerer Normaleneinheitsvektor})$$

über die Oberfläche ∂K von K für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz + 2xy \\ \text{Arctan } z - y^2 \\ x^2 z^2 + 3 \end{pmatrix} .$$

c) Bestimmen Sie den Zahlenwert des Integrals

$$\iiint_K \rho \, dK ,$$

wenn $\rho(x,y,z) \equiv 1$ ist.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, dem 19. April, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Mittwoch, dem 3. Mai, von 13.10 bis 13.45 Uhr im S 31 statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.
Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 8. bis 11. Mai.