Lösung zur 2. Klausur Diplom-Vorprüfung am 05.04.2000

1. Aufgabe

$$A_\alpha = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha & -5 & 2 \\ -5 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor (EV) von A_α zum Eigenwert (EW) λ_1 $\iff A_\alpha \vec{a} = \lambda_1 \vec{a}$

$$A_\alpha \vec{a} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha & -5 & 2 \\ -5 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\alpha-5 \\ 5+\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{\alpha+5}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \overset{!}{=} \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1\cdot\vec{a}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = \frac{\alpha+5}{3}}}$$

b) Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist EV von A_α zum EW λ_2 $\iff A_\alpha \vec{b} = \lambda_2 \vec{b}$

$$A_\alpha \vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha & -5 & 2 \\ -5 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \alpha-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\frac{\alpha-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Vergleich d. dritten Komponente: $0 = \lambda_2 \cdot 2 \iff \underline{\underline{\lambda_2 = 0}}$

Einsetzen in erste bzw. zweite Komponente: $\frac{\alpha-1}{3} = 0 \iff \underline{\underline{\alpha = 1}}$

$\Rightarrow$ $\vec{b}$ ist nur EV von A_α (zum EW $\lambda_2 = 0$) für $\alpha = 1$

c) $A_\alpha = A_\alpha^T$ d.h. A_α ist eine symmetrische Matrix $\Rightarrow$ es gibt eine Matrix S mit $S^T A_\alpha S = D$, insbesondere natürlich auch für A_1.

Aus a) und b) ist bekannt: $A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

A_1 hat EW $\lambda_1 = \frac{1+5}{3} = 2$ mit zugehörigem EV $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

—— " —— $\lambda_2 = 0$ —— " —— $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

wobei $\vec{a} \perp \vec{b}$, da EV$_n$ zu verschiedenen EW$_en$

Um D und S angeben zu können, fehlen noch der 3. EW λ_3 sowie der zugehörige EV $\vec{c}$.

Es gilt: $\quad \operatorname{spur} A_1 = \frac{1}{3}(1+1-2) = 0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 - 0 - 2 = \underline{\underline{-2 = \lambda_3}}$$

$\vec{c}$ ergibt sich aus der Orthogonalität der drei EV$_en$ (da ja $A_1 = A_1^T \Rightarrow$ EV$_en$ können orthogonalisiert werden.)

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw } \tilde{\vec{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

[Probe: $A_1 \cdot \tilde{\vec{c}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\cdot\tilde{\vec{c}}$ ok.]

also: $$S = \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}}$$

und: $$D = S^T A_1 S = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}}$$

d) $B = A_1 + E$

Bestimme $\quad S^T B S = S^T(A_1 + E)S = S^T A_1 S + S^T E S = D + E =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ B hat in Basis S Diagonalgestalt $\Rightarrow$ die EW$_e$ können in der Diagonalen abgelesen werden:

$$\underline{\underline{\tilde{\lambda}_1 = 3, \quad \tilde{\lambda}_2 = 1, \quad \tilde{\lambda}_3 = -1}}$$

2. Aufgabe

$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ und

$$\vec{f}(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}_B \qquad \vec{f}(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}_B \qquad \vec{f}(\vec{b}_3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

a) Abbildungsmatrix von $\vec{f}$ bzgl. B d.h. A_{BB}

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Betrachte die Determinante, die aus den 3 Vektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ gebildet wird; wobei die $\vec{c}_i$ bzgl. d. Basis B gegeben sind:

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ 2 \end{pmatrix}_B, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B, \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}_B$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ \alpha+1 & 1 & -\alpha \\ 2 & 2 & -\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha+1 & \alpha+2 & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 4-\alpha \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha+2 & \alpha+2 \\ 4 & 4-\alpha \end{vmatrix} =$$

$+$ $\cdot 2$ $+$

$$= (\alpha+2)\cdot(4-\alpha) - 4\cdot(\alpha+2) = (\alpha+2)\left[4-\alpha-4\right] = -\alpha(\alpha+2) =: d$$

C ist Basis $\Leftrightarrow d \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ und $\alpha \neq -2$

bzw. $\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -2\}$

c) $\alpha = -1 \Rightarrow$ Die Transformationsmatrix von der Basis C in die Basis B lautet

$$C_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Abbildungsmatrix $\tilde{A}$ von $\vec{f}$ bzgl. der Basis C gilt:

$$\tilde{A}_{CC} = C^{-1}_{CB} A_{BB} C_{BC} = (*)$$

Berechne C^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{matrix}}_{= C^{-1}}$$

also:

$$(*) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{A}_{CC}$$

d)

$\vec{f}$ nicht injektiv $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \det \tilde{A} = 0$

Es spielt keine Rolle, ob die Betrachtung in der Basis B oder der Basis C (oder irgendeiner anderen Basis) vorgenommen wird.

hier: $\det \tilde{A} = (-1)\cdot 0 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \vec{f}$ ist nicht injektiv.

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ ist Eigenwert von A (bzw $\tilde{A}$)

Ein zugehöriger Eigenvektor (zu $\lambda = 0$) ist in der Basis C durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C$ gegeben. (In der Basis C „sieht" man am meisten, da die Abbildungsmatrix von $\vec{f}$ dort diagonal ist.)

Also zB die Vektoren $\vec{x}_1 = \vec{0}$ und $\vec{x}_2 = \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C$ werden beide auf $\vec{0}$ abgebildet.

denn $\tilde{A}\cdot\vec{0} = \vec{0}$ und $\tilde{A}\vec{a} = \lambda\vec{a} = \vec{0}$

(in Basis B gilt $\vec{x}_1 = \vec{0}$ und $\vec{x}_2 = C_{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$)

3. Aufgabe

Die Gleichungen in Vektorform geschrieben lauten

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)^2 - y + z^3\cosh z - 1 \\ x + xe^y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

a) Satz über implizite Funktionen anwenden auf $\vec{F}$ im Punkt $(x,y,z) = (0,0,0)$:

$$\vec{F}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1-0+0-1 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\text{ok.}}$$

und: Auflösbarkeit nach x und y untersuchen:

$$\left| \frac{\partial \vec{F}(x,y,z)}{\partial(x,y)} \right|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = \begin{vmatrix} F_{1x} & F_{1y} \\ F_{2x} & F_{2y} \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(0,0,0)} = \begin{vmatrix} 2(x+1) & -1 \\ 1+e^y & xe^y \end{vmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \; \underline{\underline{\neq 0}}$$

$\Rightarrow$ Durch $\vec{F}(x,y,z)$ sind in einer Umgebung von $z=0$ zwei Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ mit $x(0)=y(0)=0$ implizit definiert.

b) $\vec{g}(z) = \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{g}'(z) = \begin{pmatrix} x'(z) \\ y'(z) \end{pmatrix}$ d.h. es müssen die Ableitungen von $x(z)$ und $y(z)$ nach z bestimmt werden.

also:

$$0 = h_1(z) = F_1(x(z), y(z), z) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dz} h_1(z) = F_{1x} \cdot x' + F_{1y}\, y' + F_{1z} =$$

$$= 2(x+1)x' - y' + 3z^2\cosh z + z^3 \sinh z$$

$$\Rightarrow 0 = h_1'(0) \underset{\uparrow \text{ in } (x,y,z)=(0,0,0)}{=} 2x' - y' \qquad (3)$$

$$0 = h_2(z) = F_2(x(z), y(z), z) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dz} h_2(z) = F_{2x}\, x' + F_{2y}\, y' + F_{2z} =$$

$$= (1+e^y)x' + xe^y y' + 1$$

$$\Rightarrow 0 = h_2'(0) \underset{\uparrow \text{ in } (x,y,z)=(0,0,0)}{=} 2x' + 1 \qquad (4)$$

$\Rightarrow$ aus (4) folgt: $x'(0) = -\frac{1}{2}$ eingesetzt in (3): $y'(0) = 2x'(0) = -1$

somit: $g'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Taylor-Entwicklung (1. Ordnung): $\vec{g}(z) = \vec{g}(0) + \vec{g}'(0) \cdot z$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot z = \underline{\underline{-\frac{1}{2} z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

c) Satz über implizite Funktionen anwenden auf Gleichung (1), d.h. auf

$F_1(x,y,z) = (x+1)^2 - y + z^3\cosh z - 1 = 0$

Betrachtungen nahe $(0,0,0)$:

Zunächst: $F_1(0,0,0) = 0$ (siehe a)) $\underline{\text{ok.}}$

(i) Auflösbarkeit nach x:

$$\left.\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} = 2(x+1)\Big|_{(0,0,0)} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{X(y,z) \text{ existiert}}} \text{ nahe } (y,z)=(0,0) \text{ mit } X(0,0)=0$$

(ii) Auflösbarkeit nach y:

$$\left.\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y}\right|_{(0,0,0)} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \underline{Y(x,z) \text{ existiert}} \text{ nahe } (x,z)=0 \text{ mit } Y(0,0)=0$$

(iii) Auflösbarkeit nach z:

$$\left.\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} = 3z^2\cosh z + z^3 \sinh z\Big|_{(0,0,0)} = 0 \Rightarrow \text{Satz macht } \underline{\text{keine}} \text{ Aussage.}$$

Deshalb: Nutze aus, daß $F_1(x,y,z)$ von der Form

$$F_1(x,y,z) = G(x,y) + H(z) = 0$$

ist, mit $G(x,y) = (x+1)^2 - y - 1$ und $H(z) = z^3\cosh z$

Also: $H(z) = -G(x,y) \Rightarrow$

$$z^3\cosh z = 1 + y - (x+1)^2$$

Entscheidend für die Auflösbarkeit nach z sind also die Monotonieeigenschaften von $H(z)$:

$$H'(z) = \underbrace{3z^2}_{\geq 0}\underbrace{\cosh z}_{>0} + \underbrace{z^3 \sinh z}_{\geq 0} \geq 0 \quad \text{wobei } H'(z)=0 \text{ nur für } z=0 \text{ gilt}$$

bzw. $H(z)$ hat dort einen Wendepkt. mit waager. Tangente

$\Rightarrow$ $H(z)$ ist streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ Die Auflösung von (I) nach z ist global möglich, also insbesondere auch nahe $(0,0,0)$, d.h. $z(x,y)$ existiert nahe $(x,y)=0$ mit $z(0,0)=0$

4. Aufgabe

$K: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 1 & \to \text{das Innere der Kugel um } (0,0,0) \text{ mit Radius } R=1 \\ z \le 1-\sqrt{x^2+y^2} & \to \text{das Innere des Kegels mit Spitze in } (0,0,1) \end{cases}$

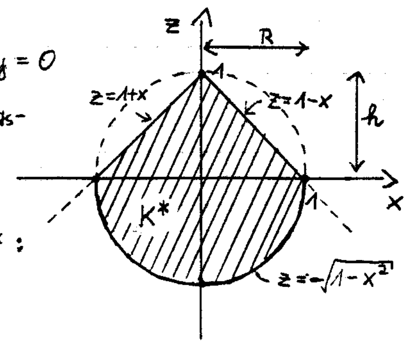
wobei die z-Achse Symmetrieachse des Kegels ist und der Schnitt mit der xy-Ebene der Einheitskreis ist.

a)

K^*: Schnitt von K mit d. xz-Ebene, d.h. $y=0$

$K^*: \begin{cases} x^2+z^2 \le 1 & \to \text{das Innere d. Einheitskreises} \\ z \le 1-|x| & \to \text{Bereich unterhalb d. Kurve } z=1-|x| \end{cases}$

Skizze von K^*:



b) Parametrisierung von K mit Hilfe von Polar- bzw. Zylinderkoordinaten,

d.h. $x = r\cdot\cos\varphi$ mit $0 \le r \le 1$
$y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi < 2\pi$
$z = z$, $-\sqrt{1-r^2} \le z \le 1-r$

Untere Grenze für z kommt von der Kugelgleichung (siehe Skizze), d.h.

$z^2 \le 1-x^2-y^2 = 1-r^2 \Rightarrow \underline{\underline{z \ge -\sqrt{1-r^2}}}$

Obere Grenze für z kommt von der Kegelgleichung, d.h.

$z \le 1-\sqrt{x^2+y^2} = 1-|r| \underset{\text{da } r\ge 0}{=} \underline{\underline{1-r}}$

$$\iint_{\partial K} \vec{v}\,\vec{N_0}\, dw \underset{\text{Gaußscher Integralsatz}}{=} \iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\, dK = (*)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{v} = \begin{pmatrix}\partial x\\ \partial y\\ \partial z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} xyz+2xy \\ \arctan z - y^2 \\ x^2z^2+3\end{pmatrix} = yz+2y-2y+2x^2z = yz+2x^2z$$

$$(*) = \iiint_K yz+2x^2z \; d(x,y,z) \overset{\text{Zylinderkoordinaten}}{=}$$

$$= \int_{r=0}^{1}\int_{z=-\sqrt{1-r^2}}^{1-r}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \big(r\underbrace{\sin\varphi}_{=0}\, z + 2r^2\underbrace{\cos^2\varphi}_{=\pi}\, z\big) r\, d\varphi\, dz\, dr$$

nach der φ-Integration

$$= \int_{r=0}^{1}\int_{z=-\sqrt{1-r^2}}^{1-r} 2\pi r^3 z \; dz\, dr = \int_{r=0}^{1} \pi \left[r^3 z^2\right]_{-\sqrt{1-r^2}}^{1-r} dr$$

$$= \int_{r=0}^{1} \pi r^3 \left[1-2r+r^2-1+r^2\right] dr = 2\pi\int_{r=0}^{1} (r^5-r^4)\, dr =$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{6}r^6 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^1 = 2\pi\left[\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{5}\right] = \underline{\underline{-\tfrac{\pi}{15}}}$$

Alternative: Kegel mit Zylinderkoord. und Halbkugel mit Kugelkoord. parametrisieren, die Teilintegrale getrennt berechnen und zum Schluß beide Werte addieren; d.h.

$$(*) = \iiint_{\text{Kegel}} \dots + \iiint_{\text{Halbkugel}} \dots = \dots = -\tfrac{\pi}{15}$$

c)

$$V = \iiint_K 1\cdot dK = \text{Volumen von } K$$

K setzt sich aus der halben Einheitskugel und dem Teil des Kegels (mit Gleichung $z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}$), der über der xy-Ebene liegt, zusammen $\Rightarrow$

$$V = V_{\text{Kegel}} + V_{\text{Halbkugel}} = \tfrac{1}{3}\cdot\text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe} + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{4}{3}\pi R^3$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h + \tfrac{2}{3}\pi R^3 = \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{2}{3}\pi = \underline{\underline{\pi}}$$

Größenangaben, siehe Anfang der Aufgabe bzw. Skizze: $R=1$ Kugelradius bzw. Radius der Kegelgrundfläche

$h=1$ Höhe des Kegels, d.h. Abstand zwischen Spitze und xy-Ebene