UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Frühjahr 2001
26.3.2001

Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ wird die lineare Abbildung $f_\alpha : V \to V$ definiert durch

$$f_\alpha(b_1) = 4b_1\,, \qquad f_\alpha(b_2) = 6b_1 + b_2\,, \qquad f_\alpha(b_3) = \alpha b_1 - 2b_2 + 2b_3\,.$$

a) Geben Sie die Abbildungsmatrix A_α von f_α bezüglich der Basis B an.

b) Zeigen Sie, dass auch $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ eine Basis von V ist, wobei

$$c_1 := 2b_1 - b_2\,, \qquad c_2 := b_1 - 2b_2 + b_3\,, \qquad c_3 := b_1\,,$$

und drücken Sie die b_k mittels der c_j aus.

c) Es wird nun speziell $\alpha = 10$ gewählt. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix von f_{10} bezüglich der Basis C.

d) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte der Matrix A_{10} (also der Abbildungsmatrix von f_{10} bezüglich B), und geben Sie jeweils einen zugehörigen Eigenvektor an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x,y) := \begin{cases} y^2 \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Überprüfen Sie, dass die Funktion f stetig ist.

b) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$ für alle Punkte (x,y), in denen das möglich ist. Weisen Sie nach, dass f_x nicht überall stetig ist.

c) Untersuchen Sie, wo f differenzierbar ist. In welchen Punkten ist f sogar stetig differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Berechnen Sie $h'(1,1)$ für die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$h(x,y) := f\big(g(x,y)\big)\,, \qquad \text{wobei} \qquad g(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 - y^3 \\ y^2 - x \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind die zwei Gleichungen

$$(1) \quad 2x^2 = y^2 + z^3 + 1 \qquad \text{und} \qquad (2) \quad x^2 + e^{y-1} + z = 2y\,.$$

a) Zeigen Sie: Durch diese Gleichungen werden in einer Umgebung von $x_0 = 1$ zwei Funktionen $y = y(x)$ und $z = z(x)$ mit $y(1) = 1$ und $z(1) = 0$ implizit definiert.

b) Berechnen Sie die Ableitungen $y'(1)$ und $z'(1)$ dieser Funktionen.

c) Berechnen Sie $y''(1)$ und $z''(1)$ unter der Annahme, dass die Funktionen y und z zweimal differenzierbar sind.

d) Jetzt wird nur Gleichung (1) betrachtet. Untersuchen Sie, ob durch Gleichung (1) in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (1,1)$ implizit eine Funktion $z = z(x,y)$ mit $z(1,1) = 0$ definiert wird.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Auf $\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z > 0\,\}$ ist das Vektorfeld $\vec{v}$ gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 6x^5y^2 + 2(x+z) \\ x^4 g(x^2 y) \\ 2x + 3 \end{pmatrix},$$

wobei $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

a) Berechnen Sie alle Funktionen g, so dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist.

b) Bestimmen Sie eine derartige Funktion g mit $g(1) = 2$.

c) Berechnen Sie für die Funktion g aus **b)** alle Potentialfunktionen von $\vec{v}$.

d) Die Kurve γ sei die geradlinige Verbindung von $(1,0,0)$ nach $(0,0,1)$. Berechnen Sie für die Funktion g aus **b)** das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.$$

Nach der Klausur

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, den 11. April, vor dem Sekretariat aus und können auch im Internet abgerufen werden:

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Mittwoch, dem 25. April, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben. Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 30. April bis 4. Mai.