UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Frühjahr 2001
2.4.2001

Lösung zur Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** Die Abbildungsmatrix von f_α bezüglich der Basis B ist

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 6 & \alpha \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Bekanntlich ist C genau dann eine Basis, wenn die Matrix $S := [\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3]$ regulär ist, wobei $\vec{c}_j$ der Koordinatenvektor von c_j bezüglich der Basis B ist. In diesem Falle sind die Spaltenvektoren der Matrix S^{-1} gerade die Koordinatenvektoren der b_k bezüglich der Basis C. Versuchen wir also, die Matrix S zu invertieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + 2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to -Z_2]{Z_1 \to Z_1 + 3Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Die Matrix S ist folglich regulär; die inverse Matrix S^{-1} besteht aus den drei letzten Spalten. Somit ist C eine Basis von V, und wir lesen ab:

$$b_1 = c_3\,, \qquad b_2 = -c_1 + 2c_3\,, \qquad b_3 = -2c_1 + c_2 + 3c_3\,.$$

c) Die Abbildungsmatrix $A_{C,10}$ von f_{10} bezüglich C ist

$$A_{C,10} = S^{-1} A_{10}\, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

d) Da $A_{C,10} = S^{-1} A_{10}\, S$ eine Diagonalmatrix ist, folgt: Die Diagonaleinträge von $A_{C,10}$ sind die Eigenwerte von A_{10} und die Spalten der Matrix S sind die zugehörigen Eigenvektoren. Die Matrix A_{10} hat also folgende Eigenwerte (mit zugehörigen Eigenvektoren):

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 2\,, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = 4\,, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 **a)** Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f offensichtlich stetig; damit ist nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ nachzuweisen. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$|f(x,y)| = \left| y^2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leqslant y^2 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0\,.$$

Damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$, also die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

b) Wegen $\nabla f = (f_x, f_y)$ müssen wir f_x und f_y berechnen. Für $(x,y) \neq (0,0)$ ergibt sich

$$f_x(x,y) = -y^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \left(-\frac{2x}{2(x^2+y^2)^{3/2}}\right) = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= 2y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - y^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \left(-\frac{2y}{2(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \\ &= 2y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{aligned}$$

Nun noch zum Punkt $(0,0)$. Definitionsgemäß gilt

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{0-0}{h} = 0\,,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{h^2\cos(|h|^{-1})-0}{h} = \lim_{h\to0} h\cos\big(|h|^{-1}\big) = 0\,.$$

Die partielle Ableitung f_x ist nicht stetig in $(0,0)$, denn für $x > 0$ gilt

$$f_x(x,x) = \frac{xx^2}{(x^2+x^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}}\right) = \frac{1}{2^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,x}\right),$$

und ganz offensichtlich konvergiert dies für $x \to 0$ nicht.

c) Offenbar ist ∇f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig, d. h. f ist dort stetig differenzierbar. Dagegen wissen wir aus Teil **b)**, dass f in $(0,0)$ nicht stetig differenzierbar ist. Wir müssen noch prüfen, ob dort dennoch Differenzierbarkeit vorliegt. Die Bedingung dafür ist

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - h_1 f_x(0,0) - h_2 f_y(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0\,.$$

Diese ist erfüllt: Mit der Darstellung $(h_1,h_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, wobei $r > 0$, folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - h_1 f_x(0,0) - h_2 f_y(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} &= \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\ = \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right) &= r(\sin\varphi)^2\cos(1/r) \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0\,, \end{aligned}$$

denn $(h_1,h_2) \to (0,0)$ bedeutet in der Polarkoordinatendarstellung $r \to 0$.

d) Offenbar ist g überall differenzierbar. Nach Kettenregel gilt

$$h'(1,1) = f'\big(g(1,1)\big)g'(1,1) = f'(0,0)g'(1,1) = (0\ 0)\,g'(1,1) = (0\ 0)\,.$$

Aufgabe 3 **a)** Die zwei Gleichungen sind äquivalent zu

$$\vec{f}(x,y,z) = \vec{0}, \qquad \text{wobei} \quad \vec{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2x^2 - y^2 - z^3 - 1 \\ x^2 + e^{y-1} + z - 2y \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $\vec{f}$ ist stetig differenzierbar, und es gilt

$$\vec{f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 2-1-0-1 \\ 1+e^{1-1}+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung folgt daher aus dem Satz über implizite Funktionen, wenn wir noch nachweisen, dass die Matrix $\partial_{(y,z)}\vec{f}(1,1,0)$ regulär ist. Es gilt

$$\partial_{(y,z)}\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2y & -3z^2 \\ e^{y-1}-2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \partial_{(y,z)}\vec{f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Determinante $-2 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = -2 \neq 0$ und ist damit regulär.

b) Der Satz über implizite Funktionen liefert insbesondere, dass die Funktionen y und z differenzierbar sind. Leiten wir in (1) und (2) nach x ab, so ergibt sich

$$(1)' \quad 4x = 2yy' + 3z^2z' \qquad \text{und} \qquad (2)' \quad 2x + e^{y-1}y' + z' = 2y'.$$

Setzen wir hier $x = 1$ ein, so folgt wegen $y(1) = 1$ und $z(1) = 0$

$$4 = 2y'(1) + 0 \qquad \text{und} \qquad 2 + y'(1) + z'(1) = 2y'(1).$$

Wir erhalten also $y'(1) = 2$ und damit dann $z'(1) = 0$.

c) Leiten wir in $(1)'$ und $(2)'$ erneut nach x ab, so haben wir

$$(1)'' \quad 4 = 2\big((y')^2 + yy''\big) + 3\big(2zz' + z^2z''\big), \qquad (2)'' \quad 2 + e^{y-1}(y')^2 + e^{y-1}y'' + z'' = 2y''.$$

Wir setzen $x = 1$ ein und beachten $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$ sowie $z(1) = z'(1) = 0$:

$$4 = 2\big(4 + y''(1)\big) + 0 \qquad \text{und} \qquad 2 + 4 + y''(1) + z''(1) = 2y''(1).$$

Hieraus folgt $y''(1) = -2$ und damit schließlich $z''(1) = -8$.

d) Gleichung (1) lässt sich darstellen in der Form

$$g(x,y,z) := 2x^2 - y^2 - z^3 - 1 = 0.$$

Die Funktion g ist stetig differenzierbar und es gilt $g(1,1,0) = 0$. Wegen

$$g_z(x,y,z) = -3z^2, \qquad \text{also} \qquad g_z(0) = 0,$$

ist der Satz über implizite Funktionen jedoch nicht anwendbar. Dennoch wird eine Funktion $z = z(x,y)$ mit $z(1,1) = 0$ implizit definiert, denn die Gleichung (1), also

$$2x^2 - y^2 - 1 = z^3,$$

ist wegen der strengen Monotonie der Abbildung $z \mapsto z^3$ eindeutig nach z auflösbar, und für $x = y = 1$ ergibt sich $z = 0$.

Aufgabe 4 **a)** Das stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{v}$ ist auf einem einfach zusammenhängendenden Gebiet definiert. Es ist folglich genau dann ein Potentialfeld, wenn $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ gilt. Wegen

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} D_2v_3 - D_3v_2 \\ D_3v_1 - D_1v_3 \\ D_1v_2 - D_2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-2 \\ 4x^3g(x^2y) + x^4g'(x^2y)\cdot 2xy - 12x^5y \end{pmatrix}$$

führt dies auf die Bedingung

$$4x^3g(x^2y) + 2x^5y\,g'(x^2y) - 12x^5y = 0.$$

Dividieren wir durch $2x^3$ und setzen $t := x^2y$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$2g(t) + tg'(t) - 6t = 0$$

für die Funktion g. Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung $2g + tg' = 0$; sie hat auf $(0,\infty)$ die allgemeine Lösung

$$g_{\mathrm{h}}(t) = C\exp\left(\int -\frac{2}{t}\,dt\right) = Ce^{-2\ln t} = \frac{C}{t^2} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu erhalten, gehen wir mit dem Ansatz $g_{\mathrm{p}}(t) = C(t)/t^2$ in die Differentialgleichung ein:

$$\frac{2C(t)}{t^2} + t\left(\frac{C'(t)}{t^2} - \frac{2C(t)}{t^3}\right) - 6t = 0.$$

Hieraus folgt $C'(t) = 6t^2$. Wir wählen $C(t) = 2t^3$ und erhalten $g_{\mathrm{p}}(t) = 2t$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann $g(t) = g_{\mathrm{p}}(t) + g_{\mathrm{h}}(t)$, und damit wissen wir: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn g die folgende Gestalt hat:

$$g(t) = 2t + \frac{C}{t^2} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

b) Wegen $g(1) = 2 + C$ müssen wir $C = 0$ wählen, d. h. wir betrachten nun $g(t) = 2t$.

c) Ist f eine Potentialfunktion von $\vec{v}$, so muss insbesondere $f_x = v_1 = 6x^5y^2 + 2(x+z)$ gelten; damit haben wir

$$f(x,y,z) = x^6y^2 + x^2 + 2xz + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion c. Es folgt

$$f_y(x,y,z) = 2x^6y + c_y(y,z) \stackrel{!}{=} v_2(x,y,z) = x^4g(x^2y) = x^4 \cdot 2x^2y = 2x^6y.$$

Damit ergibt sich $c_y = 0$, d. h. es gilt $c(y,z) = d(z)$ mit einer gewissen Funktion d. Hieraus folgt die Darstellung $f = x^6y^2 + x^2 + 2xz + d(z)$, und man erhält

$$f_z(x,y,z) = 2x + d'(z) \stackrel{!}{=} v_3(x,y,z) = 2x + 3.$$

Also ist $d'(z) = 3$, d. h. $d(z) = 3z + a$ mit einem $a \in \mathbb{R}$. Sämtliche Potentialfunktionen von $\vec{v}$ sind somit gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^6y^2 + x^2 + 2xz + 3z + a \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

d) Unter Verwendung der gefundenen Potentialfunktion ergibt sich

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = f(0,0,1) - f(1,0,0) = (3+a) - (1+a) = 2.$$