UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Frühjahr 2002
14.3.2002

Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie sämtliche Urbilder von $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ bei dieser Abbildung.

b) Bestimmen Sie eine Basis des Bildraums $\vec{f}(\mathbb{R}^3)$.

c) Sei $\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Stellen Sie den Vektor $\vec{f}(\vec{a})$ in der in **b)** angegebenen Basis dar.

d) Gibt es zu der vorgegebenen Matrix A eine von der Nullmatrix verschiedene $(3,3)$-Matrix B, für die

$$A \cdot B = 0 \quad \text{(Nullmatrix)}$$

gilt? Wenn ja, geben Sie ein derartiges B an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto yz$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) := x^4 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

zu maximieren.

a) Begründen Sie, weshalb diese Aufgabe lösbar ist, und zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Lagrangeverfahrens erfüllt sind.

b) Bestimmen Sie das Maximum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei im $\mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3y^2 + 2xy^4 \\ 2x^4y + 4x^2y^3 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie diejenige Stammfunktion $F(x,y)$ von $\vec{v}$, für die $F(0,0) = 0$ gilt.

b) Bestimmen Sie mit F aus **a)** den Wert des Gebietsintegrals $\iint\limits_B F(x,y)\,dB$, wobei der Integrationsbereich B aus allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ besteht, die den Ungleichungen

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad &\text{für} \quad -1 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad &\text{für} \quad 0 < x \le 1 \end{aligned}$$

genügen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben seien das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ yz \end{pmatrix}$ und die Kurve $\Gamma\colon \vec{x}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_\Gamma \vec{v}\,d\vec{x}$.

b) Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{v}$.

c) Bestimmen Sie mit der Fläche $\mathcal{F}\colon \vec{x}(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$, $(r,t) \in [0,1] \times [0,2\pi]$, und dem Vektorfeld $\vec{w} := \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ den Wert des Flussintegrals $\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N}_0\,d\mathcal{F}$. Hierbei sei $\vec{N}_0$ der Normaleneinheitsvektor an $\mathcal{F}$, der eine negative z-Komponente besitzt.

Nach der Klausur

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, den 27. 3, vor dem Sekretariat aus und können auch im Internet abgerufen werden:

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 16. 4, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekannt gegeben. Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 22. bis 26. April.