Lösung zur Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** Wir haben das LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - 2Z_1]{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - Z_2]{Z_1 \to Z_1 + 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ableseform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es ist also $\vec{f}^{-1}(\vec{0}) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ die Menge der Urbilder des Nullvektors.

b) Aus der Treppennormalform von A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lesen wir ab: Hätten wir in A die letzte Spalte weggelassen, so wäre eine Treppe mit maximaler Stufenzahl herausgekommen. Deshalb bilden die ersten zwei Spalten von A eine maximal linear unabhängige Teilmenge in der Menge aller Spalten von A, also eine Basis des Bildraums $A \cdot \mathbb{R}^3 = \vec{f}(\mathbb{R}^3)$.

c) Es ist $\vec{f}(\vec{a}) = A \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Es gibt eine derartige Matrix: beispielsweise

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

leistet $A \cdot B = 0$.

Aufgabe 2 **a)** Zu zeigen ist:

1. f und g sind partiell stetig differenzierbar
2. Die Nullstellenmenge von g in $\mathbb{R}^3$ ist kompakt.

(Selbstverständlich dürfen Teile hiervon auch im Aufgabenteil b) gezeigt werden).

1. f und g sind Polynome. Solche sind partiell stetig differenzierbar.

2. Die Menge $V(g) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\vec{x}) = 0\}$ ist abgeschlossen und beschränkt.

abgeschlossen: g ist eine stetige Funktion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Urbilder von abgeschlossenen Mengen unter stetigen Funktionen sind abgeschlossen. Es ist $\{0\}$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und $V(g)$ das Urbild von $\{0\}$, also in $\mathbb{R}^3$ abgeschlossen.

Alternativ: Sei $(\vec{x}_n)$ eine konvergente Folge von Punkten in $V(g)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$. Es gilt $0 = g(\vec{x}_n) \xrightarrow{n\to\infty} g(\vec{x})$ wegen der Stetigkeit von g. Also ist auch $g(\vec{x}) = 0$, d.h. $\vec{x} \in V(g)$. Also ist $V(g)$ abgeschlossen.

beschränkt: x^4, y^2 und z^2 sind positiv. Es gilt

$$x^4 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow x^4, y^4, z^4 \in [0,1] \Rightarrow x^2, y^2, z^2 \in [0,1] \Rightarrow \|\vec{x}\|_2 \leq 1$$

für $\vec{x} = (x, y, z)$. Also ist $V(g)$ beschränkt.

b) Für die Hilfsfunktion $H(\vec{x}, \lambda) := f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})$ sind die stationären Punkte zu suchen.

$$\begin{aligned}
H_x &= \lambda g_x = 4\lambda x^3 = 0 \\
H_y &= f_y + \lambda g_y = z + 2\lambda y = 0 \\
H_z &= f_z + \lambda g_z = y + 2\lambda z = 0 \\
H_\lambda &= g = x^4 + y^2 + z^2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert zwei Fälle:

$\lambda = 0$: Dann folgt $y = z = 0$. Die Nebenbedingung sagt: $x^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$.

$x = 0$: Dann addieren und subtrahieren wir die beiden mittleren Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(2\lambda + 1)(z + y) &= 0 \\
(2\lambda - 1)(z - y) &= 0
\end{aligned}$$

Die Lösung lautet $z = y = 0$ oder $\lambda = \pm 1/2$.

$y = z = 0$: Dann ist $\vec{x} = \vec{0}$, aber wegen $g(\vec{0}) = -1 \neq 0$ erfüllt der Nullvektor nicht die Nebenbedingung.

$\lambda = 1/2$: Dann ist $y = -z$. Die Nebenbedingung sagt: $y = \pm 1/\sqrt{2}$ und $z = \mp 1/\sqrt{2}$.

$\lambda = -1/2$: Dann ist $y = z$. Die Nebenbedingung sagt: $y = z = \pm 1/\sqrt{2}$.

Mögliche Extremalstellen sind noch die Nullstellen von $\nabla g = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}$.

Aber $\vec{x} \notin V(g)$.

f nimmt an diesen fünf Stellen nacheinander die Werte

$$0, \ -1/2, \ -1/2, \ 1/2, \ 1/2$$

an. Da das Lagrangeverfahren laut a) funktioniert, ist das Maximum von f auf $V(g)$ gleich $1/2$.

Aufgabe 3 **a)** Schreibe $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y \end{pmatrix}$.

Integrabilitätsbedingung: $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend und

$$Py = 8x^3y + 8xy^3 = Q_x,$$

also ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld.

Stammfunktion F:

$$\begin{aligned} F_x = P = 4x^2y^2 + 2xy^4 \quad &\Rightarrow \quad F = x^4y^2 + x^2y^4 + C(y) \\ \Rightarrow \quad & F_y = 2x^4 + 4x^2 + C'(y) \stackrel{!}{=} Q = 2x^4y + 4x^2y^3 \\ \Rightarrow \quad & C'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y) = C \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & F(x,y) = x^2y^2(x^2+y^2) + C \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$F(0,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = x^2y^2(x^2+y^2).$$

b) Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} & x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi, \\ & \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \iint\limits_B f(x,y)\,dB &= \int_0^1 \int_0^{\frac{3}{2}\pi} r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi \cdot r^2 \cdot r\,d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{3}{2}\pi} r^7 \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi\,d\varphi dr \\ &= \int_0^1 r^7 \left(\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32} \Bigg|_0^{\frac{3}{2}\pi} \right) dr = \frac{3\pi}{16} \int_0^1 r^7\,dr = \frac{3\pi}{128}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 **a)** Für das Kurvenintegral benötigen wir

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = 1 - \sin^2 t \cdot \cos t.$$

Dann ist

$$\int_\Gamma \vec{v}\, d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t \cdot \cos t)\, dt = t - \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

b) Es ist $\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) 1. Möglichkeit: $\mathcal{F}$ ist eine geschlossene Fläche, da für alle $r \in [0,1]$ gilt: $\vec{x}(r,0) = \vec{x}(r,2\pi)$. Außerdem ist der Rand $\partial\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ gerade die Kurve Γ aus a) ($r = 1$!). Γ umläuft die z-Achse positiv orientiert, somit hat der Normaleneinheitsvektor $\vec{N}_0^*$ an $\mathcal{F}$ positive z-Komponente. Außerdem gilt $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}$. Mit $\vec{N}_0 := \vec{N}_0^*$ erhalten wir mit a) und Stokes

$$\iint_\mathcal{F} \vec{w} \cdot \vec{N}_0\, d\mathcal{F} = -\iint_\mathcal{F} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{N}_0^*\, d\mathcal{F} = -2\pi.$$

2. Möglichkeit: Direkte Berechnung des Oberflächenintegrals:

$$\vec{x}(r,t) = (r\cos t, r\sin t, r\cos t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_r = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},\ \vec{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ -r\sin t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}_r \times \vec{x}_\varphi = r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{N}_0$$

$$\Rightarrow \quad \iint_\mathcal{F} \vec{w} \cdot \vec{N}_0\, d\mathcal{F} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(r\cos t - 2)\, dt dr = \int_0^1 r \left(r\sin t - 2t\big|_0^{2\pi} \right)\, dt = -4\pi \int_0^1 r\, dr$$

$$= -2\pi.$$