Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Für welche Vektoren $\vec{b}$ ist die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar? Für diese Vektoren $\vec{b}$ ist die allgemeine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ zu berechnen.
Für welche Vektoren $\vec{b}$ ist $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar?

b) Welchen Bedingungen müssen die Koordinaten von $\vec{c}$ genügen, damit die Gleichung $A^T\vec{y} = \vec{c}$ eindeutig lösbar ist? Geben Sie explizit ein $\vec{c} \neq \vec{0}$ an, das diese Bedingungen erfüllt.
Wie lautet zu diesem $\vec{c}$ die zugehörige Lösung?

Begründen Sie Ihr Vorgehen und Ihre Antworten.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es ist die Abbildung $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{\varphi} : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 3x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Fixpunkte $\vec{x}$ von $\vec{\varphi}$, das sind diejenigen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{\varphi}(\vec{x}) = \vec{x}$.

b) Ist $\vec{\varphi}$ linear? injektiv? surjektiv?

Geben Sie gegebenenfalls $\vec{\varphi}^{-1}$ an.
Begründen Sie Ihre Antworten.

c) Berechnen Sie die Ableitung $\vec{\varphi}\,'(\vec{x}_0)$ für $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es ist $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\vec{f}: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ v-u^2 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Berechnen Sie $\vec{f}\,'(u,v)$ und die Funktionaldeterminante $\det J_{\vec{f}}(u,v)$.

b) Es sei G das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ in der (u,v)–Ebene. Skizzieren Sie $B := \vec{f}(G)$ in der (x,y)–Ebene.

c) Berechnen Sie den Inhalt von B durch Integration über G (in der (u,v)–Ebene) und durch Integration über B (in der (x,y)–Ebene).

d) Berechnen Sie $\iint\limits_B (x-y+\frac{1}{4})^{-1} d(x,y)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Mit den zweimal stetig differenzierbaren Skalarfeldern $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ werden die Vektorfelder

$$\vec{w}_1 = v \bigtriangledown u,\ \vec{w}_2 = u \bigtriangledown v,\ \vec{w}_3 = \bigtriangledown(uv)$$

gebildet.

Für welche $j \in \{1,2,3\}$ gilt $\bigtriangledown \times \vec{w}_j = \bigtriangledown u \times \bigtriangledown v$? Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

b) Es sei $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ und $\vec{n}$ die Einheitsnormale auf S mit nichtnegativer z–Komponente.

Für $u(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^2,\ v(x,y,z) = x+y+z$ berechne man

$$\iint\limits_S (\bigtriangledown u \times \bigtriangledown v) \cdot d\vec{o}\,.$$

(**Hinweis:** $\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x = \int \cos^4 x dx - \frac{1}{2}\sin 2x$)

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Donnerstag, dem 10. April 2003, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 29. April 03, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.
Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 5. bis 9. Mai 03.