HM II F 2003

A1 a) $A\vec{x}=\vec{b}$. Da A eine $(2,5)$-Matrix ist, ist $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^5$ $(n=5)$ gesucht. Es ist $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ gegeben.

Es ist $r=\operatorname{rang}(A)=2=\operatorname{rang}(A,\vec{b})$. Damit ist $A\vec{x}=\vec{b}$ für jeden Vektor $\vec{b}\in\mathbb{R}^2$ lösbar.

Wegen $n-r=5-2=3$ hat das homogene System $A\vec{x}=\vec{0}$ 3 l.u. Lösungen. $A\vec{x}=\vec{b}$ hat für jedes $\vec{b}\in\mathbb{R}^2$ mehr als eine Lösung.

Lösung von $A\vec{x}=\vec{b}$ für $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	−1	0	−1	$-b_2$
−2	1	−1	2	0	b_1
1	0	−1	0	−1	$-b_2$
0	1	−3	2	−2	b_1-2b_2

$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

$\to x_1=x_3+x_5-b_2$

$\to x_2=3x_3-2x_4+2x_5+b_1-2b_2$

$\to$ Basis des Lösungsraumes von $A\vec{x}=\vec{0}$: $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Die allgemeine Lösung von $A\vec{x}=\vec{0}$: $\vec{x}_h=c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+c_3\vec{x}_3$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ beliebig.

Setzt man oben $x_3=x_4=x_5=0$, so erhält man eine Lösung $\vec{x}_p$ von $A\vec{x}=\vec{b}$:

$\vec{x}_p=\begin{pmatrix}-b_2\\b_1-2b_2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. Die allgemeine Lösung von $A\vec{x}=\vec{b}$ ist $\vec{x}_{allg}=\vec{x}_h+\vec{x}_p$.

b) $A^T\vec{y}=\vec{c}$, A^T ist $(5,2)$-Matrix, $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)^T\in\mathbb{R}^5$.

$r=\operatorname{rang}(A^T)=2=n\to n-r=0\to$ das homogene Problem $A^T\vec{y}=\vec{0}$ hat nur die triviale Lösung und $A^T\vec{y}=\vec{c}$ ist, wenn überhaupt, eindeutig lösbar.

y_1	y_2	
−2	−1	c_1
1	0	c_2
−1	1	c_3
2	0	c_4
0	1	c_5
1	0	c_2
0	1	c_2+c_3
0	−1	c_1+2c_2
1	0	$\frac{c_4}{2}$
0	1	c_5

Man liest ab: Damit $A^T\vec{y}=\vec{c}$ lösbar ist, müssen erfüllt sein:

$2c_2=c_4$

$c_2+c_3=-c_1-2c_2=c_5$

Beispiel: $A^T\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}_{\vec{y}}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\2\\-2\end{pmatrix}}_{\vec{c}}$.

A2:

$$\vec\varphi(\vec x) = \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Wir haben also $\vec\varphi(\vec x) = A\vec x$ mit der (3,3)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}.$$

a) $\vec\varphi(\vec x) = \vec x \iff A\vec x = \vec x \iff \underbrace{\begin{pmatrix}0&2&1\\0&2&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}}_{(A-E)}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$

Wegen $\det(A-E) = -4 \neq 0$, hat $\vec\varphi$ den einzigen Fixpunkt $\vec x = \vec 0$.

b) Wegen $\vec\varphi(\vec x) = A\vec x$ ist $\vec\varphi$ linear.

Es ist $\det A = \det\begin{pmatrix}1&5&0\\0&3&-1\\1&-2&0\end{pmatrix} = -7 \neq 0,$

damit ist A invertierbar, $\vec\varphi$ ist also injektiv.

$\vec\varphi$ ist surjektiv, da $A\vec x = \vec y$ für jedes $\vec y \in \mathbb{R}^3$ lösbar ist, nämlich durch $\vec x = A^{-1}\vec y$.

Berechnung von A^{-1}:

1	2	1	1	0	0
0	3	−1	0	1	0
1	−2	0	0	0	1
1	2	1	1	0	0
0	3	−1	0	1	0
0	−4	−1	−1	0	1
1	2	1	1	0	0
0	3	−1	0	1	0
0	0	$-\frac{7}{3}$	−1	$\frac{4}{3}$	1
1	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0
0	3	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$
0	0	$-\frac{7}{3}$	−1	$\frac{4}{3}$	1
1	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$
0	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$
0	0	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$

(last three columns of the final block: A^{-1})

also $\vec\varphi^{-1}(\vec x) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2x_1+2x_2+5x_3\\x_1+x_2-x_3\\3x_1-4x_2-3x_3\end{pmatrix}$

c) $\vec\varphi'(\vec x) = A$ für jedes $\vec x \in \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $\vec\varphi'(1,2,3) = A$

A3

a) $f_1(u,v) = x = u+v$

$f_2(u,v) = y = v-u^2$

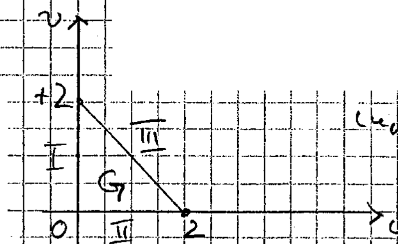
f_1, f_2 sind stetig partiell nach u, v diff'bar $\rightarrow$

$$\vec{f}'(u,v) \left(= J_{\vec{f}}(u,v)\right) = \left[D_1 \vec{f}(u,v), D_2 \vec{f}(u,v)\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det J_f(u,v) = 1+2u$$

b)

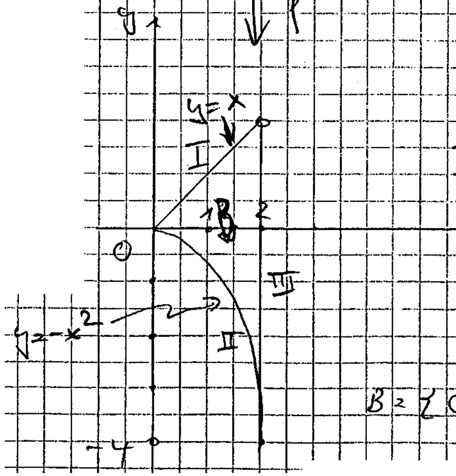


$(u,v) \in G$

$\Longleftrightarrow \quad 0 \le v \le -u+2$

$0 \le u \le 2$

$\downarrow \vec{f}$



I: $u=0 \rightarrow x=y$

II: $v=0 \rightarrow y=-x^2$

III: $v+u=2 \rightarrow x=2$

$-4 \le y \le 2$

$(1,\frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

$B = \{(x,y) \mid -x^2 \le y \le x,\ 0 \le x \le 2\}$

c) Inhalt von $B = |B| = \int_{x=0}^{2} \int_{y=-x^2}^{x} d(x,y)$

$$= \int_{x=0}^{2} (x+x^2)\,dx = \underline{\frac{14}{3}}$$

$$|B| = \int_{u=0}^{2} \int_{v=0}^{-u+2} |\det J_f(u,v)|\,dv\,du$$

$$= \int_{u=0}^{2} (2-u)(1+2u)\,du$$

$$= \int_{u=0}^{2} (2+3u-2u^2)\,du = 4+\frac{3}{2}4-\frac{2}{3}8 = \underline{\underline{\frac{14}{3}}}$$

d) $$\iint_{B=\vec{f}(G)} h(x,y)\,d(x,y) = \iint_{G} h(\vec{f}(u,v))\,|\det J_f(u,v)|\,d(u,v)$$

$$h(x,y) = \frac{1}{x-y+\frac{1}{4}} \Rightarrow \int_{u=0}^{2} \int_{v=0}^{-u+2} \frac{1+2u}{u^2+u+\frac{1}{4}}\,dv\,du$$

$$= 2\int_{u=0}^{2} \frac{(u+\frac{1}{2})(2-u)}{(u+\frac{1}{2})^2}\,du = 2\int_0^2 \frac{2-u}{u+\frac{1}{2}}\,du$$

$$= 2\int_0^2 \left(-1+\frac{5}{2}\frac{1}{u+\frac{1}{2}}\right)du = \underline{5\ln 5 - 4}$$

a) $\nabla \times \vec{w}_1 = \nabla v \times \nabla u + v \underbrace{\nabla \times \nabla u}_{=\vec{0}} = \nabla v \times \nabla u$

$\nabla \times \vec{w}_2 = \nabla u \times \nabla v + u \underbrace{\nabla \times \nabla v}_{=\vec{0}} = \nabla u \times \nabla v$

$\nabla \times \vec{w}_3 = \nabla \times (\nabla (uv)) = \vec{0}$

Für $\vec{w}_2 = u \nabla v$ gilt $\underline{\nabla \times \vec{w}_2 = \nabla u \times \nabla v}$.

b) Mit dem Stokesschen Integralsatz und nach a) gilt

$I = \iint_S (\nabla u \times \nabla v) \cdot d\vec{o} = \oint_{\partial S} \vec{w}_2 \cdot d\vec{s}$

mit $\vec{w}_2 = u \nabla v = (x^3 - y^3 + z^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und $\partial S: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 2\pi$

(wobei sich diese Orientierung aus der Vorgabe an $\vec{n}$ auf S ergibt)

$\rightarrow \quad I = \int_0^{2\pi} \vec{w}_2(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt$

$= \int_0^{2\pi} (\cos^3 t - \sin^3 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$= \int_0^{2\pi} (\cos^3 t - \sin^3 t)(\cos t - \sin t)\, dt$

$= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t - \sin t \cos t)\, dt$

Formelsammlung Hinweis

$= \frac{3}{8} t \Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{8} t \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}$