UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. Guido Schneider
Dipl.-Math. Oliver Zink
Dipl.-Math. oec. Norbert Breindl

SS 2004
19.03.2004

Lösungsvorschläge zur Diplom-Vorprüfung in Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a)
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \exp(r^2) r\, dr\, d\varphi = \pi(e-1)$$

b) Normalenvektor ist gegeben durch $v^T = (1,1,1), \|v\| = \sqrt{3}$.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x^2}} \sqrt{3}\, dy\, dx = \sqrt{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx = \sqrt{3}\Big(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x)\Big)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\sqrt{6}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Wir machen mit

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x+y+z \\ g(x,y,z) &= x^2-y^2-1 \\ h(x,y,z) &= 2x+z-1 \end{aligned}$$

den Ansatz:

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

Wir erhalten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\mu + 2\lambda x = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \mu = 0 \qquad (3)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 - y^2 - 1 = 0 \qquad (4)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2x + z - 1 = 0 \qquad (5)$$

(3) ergibt $\mu = -1$. Dies setzen wir in (1) ein. Wir erhalten $2\lambda x = 1$. Wir setzen in (2) dies für 1 ein. Es muß also $\lambda = 0$ oder $x = y$ sein. Ersteres steht im Widerspruch zu (2) und letzteres zu (4). Es gibt somit keine Extrema unter diesen Nebenbedingungen.

b) $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ erfüllt die Gleichung $xy + z + 3xz^5 = 4$. Sei $g(x, y, z) = xy + z + 3xz^5$. Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 1 + 15z^4 \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 1) = 16 \neq 0$$

Es ist somit f in der Nähe von $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ nach $z = z(x, y)$ auflösbar. Für die Ableitungen erhalten wir durch implizites Differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= \frac{y + 3z^5}{1 + 15xz^4} \Longrightarrow \frac{\partial z(1,0)}{\partial x} = \frac{3}{16} \\ \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} &= \frac{-x}{1 + 15xz^4} \Longrightarrow \frac{\partial z(1,0)}{\partial y} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) $n(x)$ bezeichne den äußeren Einheitsnormalenvektor an die Fläche S. Mit Hilfe des Integralsatzes von Gauss erhalten wir

$$\int_\Omega \mathrm{div} F \, dV = \int_S < F(x), n(x) > \, dO = 0$$

da Vektorfeld nach Voraussetzung tangential an S ist und somit $< F(x), n(x) >= 0$ für alle $x \in S$.

b) Wir betrachten den Weg c mit $(x, y) = (t, 2t^2), t \in [0, 1]$.

$$\int_C < F, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} >= \int_0^1 < \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 4t^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4t \end{pmatrix} > dt = \int_0^1 (2t^3 + 16t^5) \, dt = \frac{19}{6}$$

Es ist mit $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x \neq \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$$

und es hängt der Wert des Integrals vom Weg ab.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Es ist $\det(A-\lambda E) = -(\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$ und wir erhalten als Eigenwerte $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$. Wir haben zu den Gleichungssystemen $(A-\lambda_i E)v_i = 0, i = 1,2,3$ eine Lösung zu finden. Z. B. erhalten wir folgende Eigenvektoren:

zum Eigenwert -1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zum Eigenwert 3: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

zum Eigenwert -3: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Es ist $\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0$. Wir machen die Substitution $x = Vy \Longrightarrow \dot{x} = V\dot{y}$. Daraus folgt $V\dot{y} = AVy, x_0 = Vy_0$. Somit $\dot{y} = V^{-1}AVy$ und $y_0 = V^{-1}x_0$. Wir setzen noch $\Lambda = V^{-1}AV$. Wir lösen jetzt $\dot{y} = \Lambda y, y(t_0) = y_0$. Wir bestimmen zunächst die Inverse von $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ z. B. mit Gauß zu $V^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 12 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Löse jetzt:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -3y_1, \\ \dot{y}_2 &= -y_2, \\ \dot{y}_3 &= 3y_3, \end{aligned}$$

mit $y_{01} = 0, y_{02} = 1, y_{03} = 0$.
Wir erhalten

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{-3t} \\ y_2(t) &= c_2 e^{-t} \\ y_3(t) &= c_3 e^{3t} \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$.

Also $y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann ist $x(t) = Vy(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.