Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit gegebenem $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ zu untersuchen.

a) Geben Sie die Bedingung an $\vec{b}$ an, die erfüllt sein muss, damit das System $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist.

b) $\vec{b}$ erfülle die Lösbarkeitsbedingung (aus a)). Berechnen Sie die allgemeine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.
Ist das Problem eindeutig lösbar?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es liegt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

vor.

a) Berechnen Sie eine Matrix C derart, dass $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.
Geben Sie C^{-1} und $C^{-1}AC$ an.

b) Untersuchen Sie, ob A positiv (semi) definit oder negativ (semi) definit oder indefinit ist.
Begründen Sie Ihr Ergebnis.
Berechnen Sie $\det(A)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sind $M = \{(u,v) \mid u > v\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\vec{f} : M \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{f}(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{f}$ lokal injektiv ist.

b) Bestimmen und skizzieren Sie $\vec{f}(M)$.

c) Zeigen Sie, dass $\vec{f}$ injektiv ist.

d) Es sei $m = \{(u,v) \mid 1 < u < 2,\ -1 < v < 0\}$.
Berechnen Sie $\displaystyle\iint\limits_{\vec{f}(m)} yx\,d(x,y)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} yf(xy)\sin z + x + y \\ xf(xy)\sin z + x + y - z \\ f(xy)\cos z - y + z \end{pmatrix}$, sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

a) Berechnen Sie ein $f \neq 0$ so, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist.

b) Mit f aus a) sind alle Potentialfunktionen zum Feld $\vec{v}$ zu berechnen.

c) Es sei $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \exp(t\sin t) \\ t^2 - 2\pi t \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, die Parameterdarstellung der Kurve γ_1.
γ_2 bezeichne die gerade Verbindungslinie von $\vec{r}(0)$ nach $\vec{r}(2\pi)$.
Mit f aus a) sind $\displaystyle\int\limits_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s}$ und $\displaystyle\int\limits_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s}$ zu berechnen.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Dienstag, dem 10. Oktober, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Donnerstag, dem 19. Oktober, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 23. bis 27. Oktober.