Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) Ausgehend vom Schema (1. und 2. Zeile in $A\vec{x}=\vec{b}$ vertauschen)

x_1	x_2	x_3	x_4	
-1	5	-1	-3	b_2
4	-1	2	6	b_1
3	4	1	3	b_3

wird mittels elementarer Zeilenumformungen für $A\vec{x}=\vec{b}$ $\left(\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right)$ die folgende Zeilennormalform hergestellt

(1)

19	0	9	27	b_2+5b_1
0	19	-2	-6	b_1+4b_2
0	0	0	0	$b_3-b_1-b_2$

Man liest ab:

1) $A\vec{x}=\vec{b}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, ist lösbar genau dann, wenn $b_3=b_1+b_2$ gilt.

2) Rang$(A)=2$. Damit ist die Dimension des Lösungsraumes des Systems $A\vec{x}=\vec{0}$ zwei.

$\leadsto$ Falls $A\vec{x}=\vec{b}$ lösbar ist, gibt es viele Lösungen (keine Eindeutigkeit), es gibt zwei l. u. Lösungen des homogenen Problems

b) (1) besagt, falls $b_3=b_1+b_2$ erfüllt ist:

$$(2)\begin{cases}19x_1=b_2+5b_1-9x_3-27x_4\\19x_2=b_1+4b_2+2x_3+6x_4\end{cases}$$

1. Setze hier $\vec{b}=\vec{0}$, $x_3=1$, $x_4=0$ und $\vec{b}=0$, $x_3=0$, $x_4=1$, so erhält man zwei l. u. Lösungen von $A\vec{x}=\vec{0}$:

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-9\\2\\19\\0\end{pmatrix}\text{ und }\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-27\\6\\0\\19\end{pmatrix}$$ und die

allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $\vec{x}_H=s\vec{x}_1+t\vec{x}_2$, $s,t\in\mathbb{R}$.

2. Es sei $A\vec{x}=\vec{b}$ lösbar. Setze in (2) $x_3=x_4=0$. Dies ergibt eine Lösung von $A\vec{x}=\vec{b}$:

$$\vec{x}_p=\begin{pmatrix}\frac{1}{19}(b_2+5b_1)\\\frac{1}{19}(b_1+4b_2)\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung von $A\vec{x}=\vec{b}$ ist:

$$\vec{x}=\vec{x}_H+\vec{x}_p.$$

Es liegt keine Eindeutigkeit vor (siehe a) / oder:). Denn für jedes Paar reeller Zahlen s,t hat man eine Lösung.

Lösungsvorschlag

Aufgabe 2

a) A ist symmetrisch (reell) und besitzt daher ein ONS von drei Eigenvektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$. Mit $C = [\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3]$ gilt $C^{-1} = C^T$ und $C^{-1} A C$ = Diagonalmatrix.

1. Schritt: Eigenwerte von A

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(3-\lambda)^2 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 3}$$

2. Schritt: Eigenvektoren von A

Zu $\lambda_1 = 0$: $A\vec{v} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} 2v_1 + v_2 + v_3 &= 0 \\ v_1 + 2v_2 - v_3 &= 0 \\ v_1 - v_2 + 2v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 - v_2 + 2v_3 &= 0 \\ v_2 - v_3 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

oder $\vec{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$: $(A - 3E)\vec{w} = \vec{0}$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\vec{w} = \vec{0}$

$$-w_1 + w_2 + w_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\perp \text{ zu } \vec{v})$$

und $\vec{z} = \vec{v} \times \vec{w}$ $\quad (\perp$ zu $\vec{v}$ und $\vec{w})$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{w}, \vec{z}$ normieren: $\vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Schritt:

Also:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} A C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Die EW von A sind nichtnegativ: 2 EW sind positiv, einer verschwindet: A ist positiv semidefinit, aber nicht positiv definit.

$$\det(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vorlesung}}}{=} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0.$$

Lösungsvorschlag

Aufgabe 3

a) $$\vec{f}(u,v) = \begin{pmatrix} f_1(u,v) \\ f_2(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det \vec{f}'(u,v) = 2(v-u)$$

$\det \vec{f}'(u,v) \neq 0$ für alle $(u,v) \in M$. Damit liefert der Satz über die inverse Funktion der Vorlesung die Behauptung.

b) $\vec{f}$ ist für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ beliebig oft stetig diff'bar, insbesondere stetig.

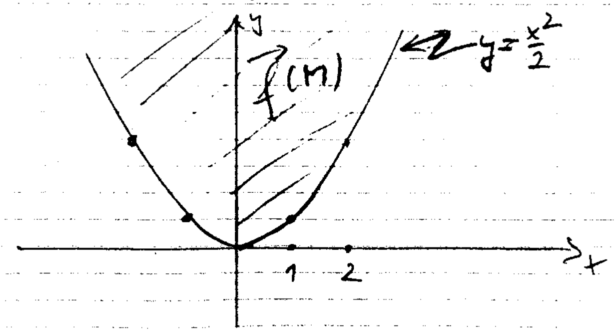
Der Rand von M : $v = u$ geht über in

$$x = 2u,\ y = 2u^2 \iff y = \frac{x^2}{2}$$

Wegen $y - \frac{x^2}{2} = u^2+v^2 - \frac{1}{2}(u^2+v^2+2uv) = \frac{1}{2}(u-v)^2$ gilt:

$$(x,y) \in \vec{f}(M) \iff (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y > \frac{x^2}{2}.$$

Das heißt: $\vec{f}(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{x^2}{2}\}$



c) Es ist aus $\vec{f}(u_1,v_1) = \vec{f}(u_2,v_2)$, $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in M$ zu folgern: $u_1 = u_2$ und $v_1 = v_2$.

Es sei also: $\vec{f}(u_1,v_1) = \vec{f}(u_2,v_2)$

$$\iff (u_1+v_1 = u_2+v_2) \text{ und } (u_1^2+v_1^2 = u_2^2+v_2^2)$$

$$\iff (*)\ (u_1-u_2 = v_2-v_1) \text{ und } ((u_1-u_2)(u_1+u_2) = (v_2-v_1)(v_1+v_2))$$

$$\Rightarrow (u_1-u_2)\underbrace{(u_1-v_1+u_2-v_2)}_{>0, \text{ da } (u_1,v_1),(u_2,v_2) \in M} = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} v_1 = v_2 \ ✓$$

d) Es gilt $m \subset M$. Nach c) ist $\vec{f}$ auf m injektiv. Somit ist die Substitutionsregel für Bereichsintegrale anwendbar:

$$\iint_{\vec{f}(m)} yx \, d(x,y) = \int_{v=-1}^{0} \int_{u=1}^{2} (u^2+v^2)(u+v)\underbrace{2|v-u|}_{|\det \vec{f}'(u,v)|} \, du \, dv$$

$$= 2\int_{v=-1}^{0} \int_{u=1}^{2} (u^4-v^4) \, du \, dv = 12$$

Lösungsvorschlag

Aufgabe 4

a) Es ist f so zu berechnen, dass $\nabla \times \vec{v}\,(x,y,z) = \vec{0}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, wird.

$$(\nabla \times \vec{v})(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos(z)\,(f'(xy) - f(xy)) \\ y\cos(z)\,(f(xy) - f'(xy)) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0} \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad f'(xy) = f(xy) \quad \Rightarrow \quad \underline{f(xy) = e^{xy}}$$

b) Es ist $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aus

$$\begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \nabla\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} y e^{xy}\sin z + x + y \\ x e^{xy}\sin z + x + y - z \\ e^{xy}\cos z - y + z \end{pmatrix} \;(= \vec{v}(x,y,z))$$

zu berechnen.

Man erhält alle derartigen φ in der Form

$$\underline{\varphi(x,y,z) = e^{xy}\sin z - yz + xy + \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + c}, \quad c \text{ konst.} \in \mathbb{R}$$

c) Da $\vec{v}$ Potentialfeld ist, gilt:

$$\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \varphi(\vec{r}(2\pi)) - \varphi(\vec{r}(0))$$

$$= \varphi(1,0,-1) - \varphi(1,0,1) = (\sin(-1)+1) - (\sin 1 + 1)$$

$$= \underline{-2\sin 1}$$