UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Herbst 2001
25.9.2001

Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$\mathbb{L} := \{\vec{u} + \mu_1\vec{u}_1 + \mu_2\vec{u}_2 + \mu_3\vec{u}_3 + \mu_4\vec{u}_4 \mid \mu_1, \dots, \mu_4 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Bestimmen Sie ein reelles lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

In der xy-Ebene ist das ebene Kurvenstück

$$\gamma\colon \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

gegeben. Weiter sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y) := \begin{pmatrix} \sin x + g(x,y) \\ 2y \sin x \end{pmatrix},$$

wobei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

a) Skizzieren Sie γ und berechnen Sie für $g(x,y) = y$ das Kurvenintegral $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{x}$.

b) Bestimmen Sie g mit $g(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ derart, dass $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist, und berechnen Sie alle zugehörenden Stammfunktionen.

c) Welchen Wert besitzt das Kurvenintegral über $\vec{v}$ längs γ, wenn $\vec{v}$ die Bedingungen von **b)** erfüllt?

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Auf dem Bereich

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

ist die Funktion $f\colon B \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 12xy + 9y$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie B, berechnen Sie alle relativen Extremwertstellen von f im Inneren von B, und geben Sie jeweils die Art des Extremums und den zugehörigen Funktionswert an.

b) Begründen Sie, warum die in **a)** berechneten relativen Extremwertstellen keine absoluten Extrema von f auf B sind.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x - z \\ x^2 + yz \\ -3 + y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie das Flussintegral

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_1} \vec{v} \cdot \vec{N}_{0,1}\, d\mathcal{F}$$

mit der Fläche $\mathcal{F}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0\}$. Hierbei ist $\vec{N}_{0,1}$ der Normaleneinheitsvektor auf $\mathcal{F}_1$, der eine positive z-Komponente besitzt.

b) Ermitteln Sie den Wert des Volumenintegrals

$$\iiint\limits_{B} \operatorname{div} \vec{v}\, dB$$

mit dem Bereich $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

c) Berechnen Sie nun noch

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N}_{0,2}\, d\mathcal{F}$$

mit $\mathcal{F}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z \geq 0\}$. Auch hier sei $\vec{N}_{0,2}$ der Normaleneinheitsvektor auf $\mathcal{F}_2$ mit positiver z-Komponente.

Anleitung zu **c)***: Verwenden Sie die Ergebnisse aus* **a)** *und* **b)**.

Nach der Klausur Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, den 10. Oktober, vor dem Sekretariat aus und können auch im Internet abgerufen werden:

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 16. Oktober, von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekannt gegeben. Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 22. bis 26. Oktober.