UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Herbst 2001
25.9.2001

Lösungsvorschläge zur Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1

Die Vektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_4$ sind offensichtlich linear unabhängig, der homogene Lösungsraum

$$\mathbb{L}_h = \{\mu_1\vec{u}_1 + \cdots + \mu_4\vec{u}_4 \mid \mu_1, \ldots, \mu_4 \in \mathbb{R}\}$$

eines zugehörigen LGS ist daher vierdimensional. Wegen $\mathbb{L}_h \subseteq \mathbb{R}^5$ genügt eine einzige Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b\,.$$

Für den Koeffizientenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$ haben wir also das homogene LGS

$$\begin{aligned} \vec{a}^T\vec{u}_1 &= 0 \\ \vec{a}^T\vec{u}_2 &= 0 \\ \vec{a}^T\vec{u}_3 &= 0 \\ \vec{a}^T\vec{u}_4 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Mit der Matrix $U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vec{u}_3^T \\ \vec{u}_4^T \end{pmatrix} \in M_{4,5}$ heißt das LGS einfach $\quad U \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hier speziell:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to Z_2 + Z_1]{Z_1 \to -Z_3 + Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to 2Z_4 + Z_1]{Z_2 \to Z_4 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt den Lösungsraum $\mathbb{K}$ für die möglichen Koeffizientenvektoren

$$\mathbb{K} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wählen wir $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, erhalten wir die inhomogene Gleichung

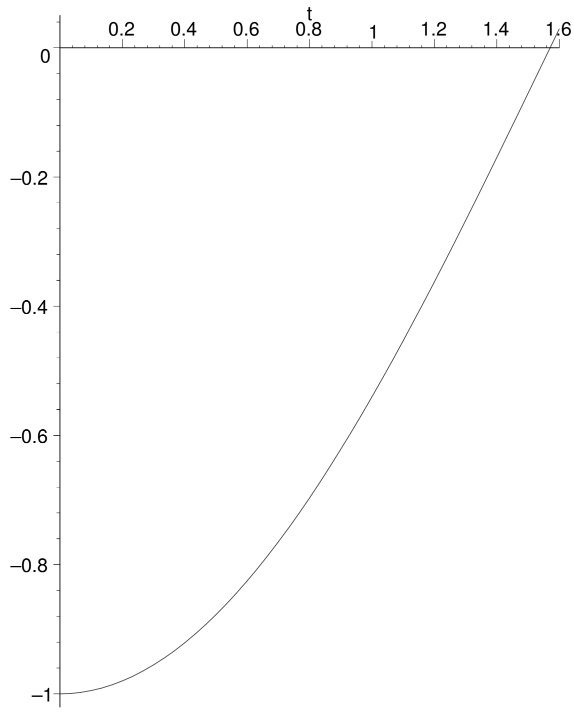
$$5x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = b\,.$$

Nun ist $\vec{u}$ eine Lösung dieser Gleichung, also

$$b = \vec{a}^T \cdot \vec{u} = 3\,.$$

Aufgabe 2

a) Skizze:



Es ist $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x + y \\ 2y \sin x \end{pmatrix}, \quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}.$
Das Kurvenintegral:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\vec{x}'(t)) \cdot \vec{x}'(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \cos t - 2 \cos t \sin^2 t)\, dt = -\cos t - \sin t - \frac{2}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

b) Vektorfelder $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^2$ sind genau dann Gradientenfelder, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$u_y = w_x$$

erfüllt ist. Hier haben wir zu prüfen:

$$g_y(x,y) = 2y \cos x\,.$$

Genau dann ist aber $g(x,y) = y^2 \cos x + k(x)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $k(x)$. Nach Voraussetzung ist $0 = g(x,0) = k(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wir haben also

$$g(x,y) = y^2 \cos x$$

gefunden.

Die Stammfunktionen F von $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x + y^2 \cos x \\ 2y \sin x \end{pmatrix}$:

$$F_x = \sin x + y^2 \cos x$$

bedeutet $F = -\sin x + y^2 + c(y)$.

$$F_y = 2y \sin x + c'(y) \overset{!}{=} 2y \sin x$$

ist äquivalent zu c konstant. Also haben alle Stammfunktionen von $\vec{v}$ die Gestalt

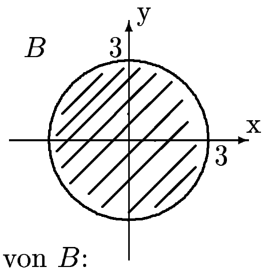
$$F(x,y) = -\cos x + y^2 \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

c) Da $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist, gilt

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{x} = F\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - F(0,1) = 1.$$

Aufgabe 3

a) Skizze:



Die relativen Extrema von f im Innern von B:

$$\nabla f = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 6xy - 12y &= 0 \\ 3y^2 + 3x^2 - 12x + 9 &= 0 \end{aligned}$$

1. Gleichung: $6y(x-2) = 0$:
Fall $y = 0$: Zweite Gleichung liefert $3x^2 - 12x + 9 = 0$, also $x^2 - 4x + 3 = 0$ mit Lösung

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1\,.$$

Nur $x_2 = 1$ liefert mit $(1,0)$ einen inneren Punkt von B.
Fall $x = 2$: Zweite Gleichung liefert $3y^2 + 12 - 24 + 9 = 0$, also $y^2 = 1$. Dies ergibt die inneren Punkte von B: $(2,1)$ und $(2,-1)$.

Betrachte nun die Hessematrix

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y & 6x-12 \\ 6x-12 & 6y \end{pmatrix}\ :$$

$H(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ hat negative Determinante, also liegt kein Extremum vor.
$H(2,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, also liegt ein relatives Minimum vor.
$H(2,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ ist negativ definit, also liegt ein relatives Maximum vor.
Die zugehörigen Funktionswerte:

$$f(2,1) = -2, \quad f(2,-1) = 2.$$

b) Wir müssen nur zeigen, dass f auf dem Rand von B höhere Werte als 2 und niedrigere Werte als -2 annimmt:

$$f(0,3) = 54, \quad f(0,-3) = -54$$

etwa sind solche Beispiele (die eingesetzten Punkte sind tatsächlich Randpunkte).

Aufgabe 4

Parametrisiere $\mathcal{F}_1$:

$$f\colon [0,2]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} r\\ \varphi\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}.$$

Es ist offenbar $\vec{N}_{0,1}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{F}_1}\vec{v}\cdot\vec{N}_{0,1}\,d\mathcal{F} &= \int_0^2\int_0^{2\pi}\vec{v}(r\cos\varphi,r\sin\varphi,0)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}r\,d\varphi dr = \int_0^2\int_0^{2\pi}(-3+r^2\sin^2\varphi)r\,d\varphi dr\\ &= \int_0^2\left(-6\pi r + r^3\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi}_{=\pi}\right)dr = \int_0^2(-6\pi r+\pi r^3)\,dr = -3\pi r^2+\frac{\pi}{4}r^4\Big|_0^2\\ &= -8\pi\end{aligned}$$

b) Es ist

$$\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z)=1+z.$$

Für B nehmen wir Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x&=r\cos\varphi\\ y&=r\sin\varphi\\ z&=z\end{aligned}\qquad r\in[0,2],\ \varphi\in[0,2\pi],\ z\in[0,2-r].$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\iiint\limits_B\operatorname{div}\vec{v}\,dB &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{2-r}(1+z)r\,dzdrd\varphi = 2\pi\int_0^2\left(z+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{2-r}r\,dr = 2\pi\int_0^2\left(4r-3r^2+\frac{r^3}{2}\right)dr\\ &= 2\pi\left(2r^2-r^3+\frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^2 = 4\pi\end{aligned}$$

c) Es ist, wenn $\vec{N}_0$ ins Äußere von ∂B weist,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{F}_2}\vec{v}\cdot\vec{N}_{0,2}\,d\mathcal{F} &= \iint\limits_{\partial B}\vec{v}\cdot\vec{N}_0\,d\mathcal{F}-\iint\limits_{\mathcal{F}_1}\vec{v}\cdot(-\vec{N}_{0,1})\,d\mathcal{F} \overset{\text{Gauß}}{=} \iiint\limits_B\operatorname{div}\vec{v}\,dB+\iint\limits_{\mathcal{F}_1}\vec{v}\cdot\vec{N}_{0,1}\,d\mathcal{F}\\ &\overset{\textbf{a)}\text{ und }\textbf{b)}}{=} 4\pi-8\pi=-4\pi\end{aligned}$$