UNIVERSITÄT KARLSRUHE | **24.09.2002**
MATHEMATISCHES INSTITUT I | **Herbst 2002**

DIPLOM–VORPRÜFUNG

zur Höheren Mathematik für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

2. KLAUSUR

1. Aufgabe (10 Punkte):

a) Begründen Sie, daß durch $V = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; : \; x - y + z = 0 \right\}$ ein reeller Vektorraum gegeben ist. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

b) Es sei $\vec{p} : \mathbb{R}^3 \to V$ die orthogonale Projektion, d.h. $\vec{x} - \vec{p}(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, steht senkrecht auf jedem Vektor $\vec{v} \in V$. Leiten Sie eine Darstellung für $\vec{p}(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, her. Begründen Sie, daß $\vec{p}$ linear ist.

c) Bestimmen Sie die Matrix, die $\vec{p}$ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellt. Geben Sie den Vektorraum $\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \; : \; \vec{p}(\vec{x}) = \vec{0} \right\}$ an.

2. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist die von einem reellen Parameter t abhängige Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t & t^2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 2t^2 + t + 1 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, so daß A_t bezüglich der Standardbasis die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung $\vec{f} \; : \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{f}(1,2,3) = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A_{-1} sowie die zugehörigen Eigenräume. Gibt es eine Orthogonalmatrix S, so daß $S^T A_{-1} S = D$ Diagonalgestalt hat? (Begründung!) Bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche Matrix S, und geben Sie D an.

c) Geben Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ an, für die $A_{-1}\vec{x} = \vec{0}$ gilt.

– bitte wenden –

3. Aufgabe (10 Punkte):

Durch

$$x = u^2 - v^2 \ , \quad y = 2uv$$

wird eine Abbildung $\vec{f}$ von $H = \{(u,v) \ : \ u^2 + v^2 < 1 \ , \ u > 0 \ , \ v > 0\}$ auf eine Menge G der (x,y)-Ebene gegeben.

a) Untersuchen Sie, ob $\vec{f}$ injektiv und differenzierbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls $\vec{f}\,'(u,v)$, $(u,v) \in H$.

b) Bestimmen Sie G. Berechnen Sie hierzu das Bild der Randkurve von H. Sie können annehmen, daß dieses Bild die Randkurve von G ist.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von G. Berechnen Sie $\displaystyle\iint_G \frac{d(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v} \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sinh(x+y) + \alpha x y^2 z^2 \\ \sinh(x+y) + \sin y + \beta^2 x^2 y z^2 \\ z e^z + xyf(xyz) \end{pmatrix} ,$$

wobei $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist.

a) Bestimmen Sie alle Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sowie alle Funktionen f, so daß $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist. Welche Funktionen f erhält man, falls $\vec{v}$ nur auf $\{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ definiert ist?

b) Im folgenden gelte nun $\alpha = \beta = 1$ und $f(t) = t$. Berechnen Sie das Potential $U = U(x,y,z)$ von $\vec{v}$, für das $U(0,0,0) = 0$ gilt.

c) Mit $N_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ U(x,y,z) = c\}$ $(c \in \mathbb{R})$ wird die Niveau- bzw. Äquipotentialfläche von U zum Niveau c bezeichnet. Für welches c_0 gilt $(0,0,1) \in N_{c_0}$? Bestimmen Sie die Tangentialebene an N_{c_0} im Punkt $(0,0,1)$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, dem 9. Oktober, vor dem Sekretariat aus und liegen ab Montag, dem 14. Oktober, unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 15. Oktober, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 21. bis 25. Oktober.