Lösungen zur 2. Klausur (VD) im Herbst 2002

①
$$V=\left\{\vec x=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x-y+z=0\right\}=\left\{\vec x : \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\vec x=0\right\}, \text{ d.h.}$$

$$\vec x\in V \Leftrightarrow \vec x\cdot\vec n=0 \quad \left(\text{mit } \vec n=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

⇒ V ist eine Ebene, die den Ursprung enthält ⇒ V ist Vektorraum (vgl. Vorlesung)

Oder: Vektorraumaxiome nachrechnen, d.h. insbes. ist zu zeigen:

$$\vec x_1,\vec x_2\in V,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \Rightarrow (\alpha\vec x_1+\beta\vec x_2)\cdot\vec n=0$$

Orthonormalbasis ⇒ Nutze aus, daß V Ebene durch $\vec 0$ ist, d.h. zweidimensional
⇒ Zwei orthogonale Vektoren, die die Ebene aufspannen:

$$\vec a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ (Wahl)} \overset{\text{normiert}}{\Longrightarrow} \vec b_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \overset{\text{normiert}}{\Longrightarrow} \vec b_2=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$B=\left\{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$
(ONB von V)

b) Orthogonale Projektion $\vec p:\mathbb{R}^3\to V$, d.h. $(\vec x-\vec p(\vec x))\cdot\vec v=\vec 0$ mit $\vec v\in V$ (beliebig) (*)

Da $\vec p(\vec x)\in V$ gilt, kann man mit Hilfe von B schreiben

$\vec p(\vec x)=\lambda_1\vec b_1+\lambda_2\vec b_2$ d.h. (*) wird zu:

$(\vec x-\lambda_1\vec b_1-\lambda_2\vec b_2)\cdot\vec v=0$. Wählt man speziell $\vec v=\vec b_1$ bzw. $\vec v=\vec b_2$

erhält man folgende beiden Gleichungen:

- $0=(\vec x-\lambda_1\vec b_1-\lambda_2\vec b_2)\cdot\vec b_1 \Leftrightarrow \vec x\cdot\vec b_1=\lambda_1$
- $0=(\vec x-\lambda_1\vec b_1-\lambda_2\vec b_2)\cdot\vec b_2 \Leftrightarrow \vec x\cdot\vec b_2=\lambda_2$

} d.h. senkrechte Proj. auf d. Basisvektoren mit Hilfe d. Skalarprodukts ...

Also $\vec p(\vec x)=(\vec x\cdot\vec b_1)\vec b_1+(\vec x\cdot\vec b_2)\vec b_2$, $\vec x\in\mathbb{R}^3$

⇒ $\vec p$ ist linear, da das Skalarprodukt $\vec x\cdot\vec b_1$ bzw. $\vec x\cdot\vec b_2$ bzgl. $\vec x$ linear ist.
Außerdem ist Multiplikation mit einem Skalar $\beta\vec b_1$ bzw. $\beta\vec b_2$ bzgl. β linear.

c) $\vec p$ linear ⇒ Darstellung mit Hilfe einer Matrix ist möglich, wobei die Bilder der Basisvektoren in den Spalten der Matrix stehen:

- $\vec p\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\frac12\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac16\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\frac13\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$
- $\vec p\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\ \ldots\ =\frac12\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac16\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\frac13\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
- $\vec p\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\ \ldots\ =-\frac26\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\frac13\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P=\frac13\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$\{\vec x\in\mathbb{R}^3:\vec p(\vec x)=\vec 0\}$ ist die Menge der Vektoren, die durch die senkrechte Projektion $\vec p$ in die Ebene auf $\vec 0$ abgebildet werden. Anschaulich sind dies also alle Punkte, die auf der Geraden g durch $\vec 0$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ liegen:

↖ Normalenvektor d. Ebene

$$g:\ \vec x=\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

②
$$A_t=\begin{pmatrix}t&t^2&-2\\1&-1&-2\\-2&-2&2t^2+t+1\end{pmatrix}$$

a) $\vec f(1,2,3)=A_t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+2t^2-6\\1-2-6\\-2-4+6t^2+3t+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t^2+t-6\\-7\\6t^2+3t-3\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}-5\\-7\\0\end{pmatrix}$

1. Komp: $2t^2+t-1=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\begin{cases}-1\\ \frac12\end{cases}$

2. Komp: $-7=-7$ ok.

3. Komp: $6t^2+3t-3=0$ für $t=-1$ und $t=\frac12$

Also: $t=-1$ und $t=\frac12$ sind alle gesuchten $t\in\mathbb{R}$.

b) $A_{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1&-1&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ ⇒ A_{-1} ist eine symm. Matrix ⇒ Eine solche Orthogonalmatrix S existiert.

Eigenwerte λ: $0=\det(A_{-1}-\lambda E)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&-2\\1&-1-\lambda&-2\\-2&-2&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&-2\\2+\lambda&-1-\lambda&-2\\0&-2&2-\lambda\end{vmatrix}+\ =$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -4 \\ 2+\lambda & -1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\left(-2\lambda+\lambda^2-8\right)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -2 \;,\; \lambda_{2,3} = \left(2 \pm \sqrt{4+32}\right)\tfrac{1}{2} = \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$

Eigenräume:

$\underline{\underline{\lambda_{1,2} = -2}}$: $\left(A_{-1} - (-2)E\right)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow x+y-2z=0 \Leftrightarrow x = 2z-y \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z-y \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (r,s \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \underline{\underline{ER(-2) = L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}}$

$\underline{\underline{\lambda_3 = 4}}$: $\left(A_{-1} - 4E\right)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot 5 \;]+ \;\cdot 2\;]+ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -24 & -12 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \;]+ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = y \\ z = -2y \end{matrix}$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R}) \qquad \Rightarrow \underline{\underline{ER(4) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}}$

$\Rightarrow$ Bestimmung orthogonaler Eigenvektoren (mit Hilfe d. Kreuzproduktes)

$$\underset{\lambda=-2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underset{\lambda=-2}{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}} \xRightarrow{\text{normiert}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow S^T A_{-1} S = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) 0 ist kein EW von $A_{-1} \Leftrightarrow \det A_{-1} \neq 0 \Leftrightarrow A_{-1}\vec{x} = \vec{0}$ hat genau eine Lösung, nämlich $\underline{\underline{\vec{x} = \vec{0}}}$.

③ Betrachte die Abbildung $\vec{f} : H \to G : \vec{f}(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \end{pmatrix}$; $u,v > 0$

a) Die Abbildung ist injektiv, falls gilt:

$$\left(u_1^2 - v_1^2 = u_2^2 - v_2^2 \;\underline{\text{und}}\; 2u_1v_1 = 2u_2v_2\right) \Rightarrow \left(u_1 = u_2 \text{ und } v_1 = v_2\right)$$

Rechnung:

(**) $u_1 v_1 = u_2 v_2 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{u_2 v_2}{v_1}$ eingesetzt in d. erste Gleichung:

$u,v>0 \Rightarrow v_1 > 0$

$$\left(\frac{u_2 v_2}{v_1}\right)^2 - v_1^2 = u_2^2 - v_2^2 \Leftrightarrow u_2^2 v_2^2 - v_1^4 = v_1^2 u_2^2 - v_1^2 v_2^2 \Leftrightarrow$$

$$u_2^2(v_2^2 - v_1^2) = v_1^2(v_1^2 - v_2^2) \Leftrightarrow (v_1^2 - v_2^2)\underbrace{(v_1^2 + u_2^2)}_{\neq 0,\ \text{da } u>0,\ v>0} = 0 \quad \begin{pmatrix}\text{vgl. Def.} \\ \text{von } H\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (v_1 - v_2)\cdot\underbrace{(v_1 + v_2)}_{\neq 0,\ \text{da } v>0} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{v_1 = v_2}}$$

Eingesetzt in (**) folgt: $\underline{\underline{u_1 = u_2}}$ $\longrightarrow$ Somit ist $\vec{f}$ injektiv.

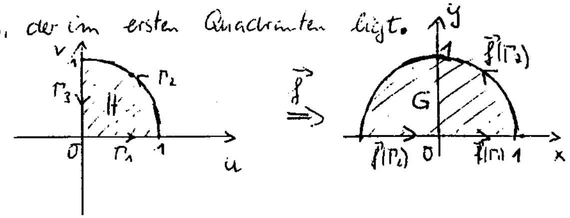
Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ existieren und stetig sind, ist f differenzierbar, und es gilt: $\vec{f}'(u,v) = \left(\vec{f}_u, \vec{f}_v\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}}}$

$\Rightarrow$ Funktionaldet.: $\left|\vec{f}'(u,v)\right| = 4(u^2+v^2)$

$\uparrow$ ist in c) nützlich

b) H ist der Teil des Einheitskreises, der im ersten Quadranten liegt.

Parametrisierung des Randes:



$\Gamma_1 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

$\Gamma_2 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$-\Gamma_3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

Abbildung des Randes:

$\vec{f}(\Gamma_1) = \vec{f}(t,0) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$ $\leftarrow$ posit. reelle Achse zwischen 0 und 1

$\vec{f}(\Gamma_2) = \vec{f}(\cos t, \sin t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ 2\cos t \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\nwarrow$ Kreislinie, Halbkreis

$\vec{f}(\Gamma_3) = \vec{f}(0,t) = \begin{pmatrix} -t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$ $\leftarrow$ negative reelle Achse zwischen -1 und 0

G ist das Innere des von $\vec{f}(\Gamma_1), \vec{f}(\Gamma_2), \vec{f}(\Gamma_3)$ berandeten Halbkreises, was mit Hilfe einer Punktprobe gezeigt wird: $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in H$, $\vec{f}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in G$

c) $|G| = \iint_G d(x,y) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\pi}}$ ← G ist Halbkreis

Polarkoord.: $u = r\cos t \quad r \in [0,1]$; $v = r\sin t \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Subst.: Drücke x,y durch u,v aus; s.o.

$$\iint_G \frac{d(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_H \left|\vec{f}'(u,v)\right| \frac{1}{u^2+v^2}\, d(u,v) = \iint_H 4\, d(u,v) = 4\int_{r=0}^{1} r \int_{t=0}^{\pi/2} dt\, dr = \underline{\underline{\pi}}$$

④ $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sinh(x+y) + \alpha x y^2 z^2 \\ \sinh(x+y) + \sin y + \beta^2 x^2 y z^2 \\ z e^z + xy\, f(xyz) \end{pmatrix}$

a)
$\vec{v}$ ist Potentialfeld $\Leftrightarrow$ rot $\vec{v} = \vec{0}$

$$\vec{0} = \text{rot}\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sinh(x+y) + \alpha x y^2 z^2 \\ \sinh(x+y) + \sin y + \beta^2 x^2 y z^2 \\ z e^z + xy\, f(xyz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x f(xyz) + xy f'(xyz) xz - 2\beta^2 x^2 y z \\ 2\alpha x y^2 z - y f(xyz) - xy f'(xyz) yz \\ \cosh(x+y) + 2\beta^2 x y z^2 - \cosh(x+y) - 2\alpha x y z^2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ 3. Komponente: $\beta^2 = \alpha \in \mathbb{R}$ d.h. $\alpha \geq 0$; $\beta \in \mathbb{R}$

2. Komponente: $2\alpha x y^2 z - y f(xyz) - x y^2 z f'(xyz) = 0$

$\Rightarrow$ DGL 1. Ordn., lin., inhomogen: $x y^2 z f'(xyz) + y f(xyz) = 2\alpha x y^2 z \quad | \cdot xz$

$\Leftrightarrow \quad x^2 y^2 z^2 f'(xyz) + xyz\, f(xyz) = 2\alpha x^2 y^2 z^2$

Subst $t := xyz$: $\quad t^2 f'(t) + t f(t) = 2\alpha t^2$

Homog DGL: $\quad t^2 f'(t) + t f(t) = 0 \Rightarrow f(t) = c_1 \cdot \frac{1}{t}$ ← Lös. d. homog. Gleich. $(c_1 \in \mathbb{R})$

Inhomog DGL: s.o. Ansatz mit Var. d. Konstanten, d.h. $f(t) = c(t)\frac{1}{t}$

$\Rightarrow f'(t) = c'(t)\frac{1}{t} - \frac{c(t)}{t^2}$ $\qquad$ setze Int. konst. $= 0$

Eingesetzt: $\left(\frac{c'}{t} - \frac{c}{t^2}\right)t^2 + c = 2\alpha t^2 \Leftrightarrow c' t = 2\alpha t^2 \Rightarrow c(t) = \alpha t^2$

$f_s(t) = \alpha t$ ← Eine Lös. d. inhomog. Gleich.

$\Rightarrow f_{ges}(t) = c_1 \cdot \frac{1}{t} + \beta^2 t$

1. Fall: $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, d.h. $t \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow f(t) = \beta^2 t \quad (\beta \in \mathbb{R})$
da f in diesem Fall auch für $t = 0$ definiert sein muß.

2. Fall: $x,y,z > 0$, d.h. $t \neq 0 \Rightarrow f(t) = c_1 \frac{1}{t} + \beta^2 t \quad (c_1 \in \mathbb{R})$

Beachte: Die Betrachtung d. 1. Komponente des Kreuzprodukts führt auf dieselbe inhomog. DGL, die bereits bei d. Untersuchung d. 2. Komponente gelöst wurde.

b)
$\alpha = \beta = 1$; $f(t) = t$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \sinh(x+y) + x y^2 z^2 \\ \sinh(x+y) + \sin y + x^2 y z^2 \\ z e^z + x^2 y^2 z \end{pmatrix} = \nabla U(x,y,z) = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$$

Also: $U_x = \sinh(x+y) + x y^2 z^2 \Leftrightarrow U(x,y,z) = \cosh(x+y) + \frac{1}{2} x^2 y^2 z^2 + c_2(y,z)$

$\Rightarrow U_y = \sinh(x+y) + x^2 y z^2 + c_{2y}(y,z) \overset{!}{=} \sinh(x+y) + \sin y + x^2 y z^2$

$\Leftrightarrow c_{2y}(y,z) = \sin y \quad \Leftrightarrow c_2(y,z) = -\cos y + c_3(z)$

Somit: $U(x,y,z) = \cosh(x+y) + \frac{1}{2} x^2 y^2 z^2 - \cos y + c_3(z)$

$\Rightarrow U_z(x,y,z) = x^2 y^2 z + c_{3z}(z) \overset{!}{=} z e^z + x^2 y^2 z$

$\Leftrightarrow \quad c_{3z}(z) = z e^z \quad \Leftrightarrow c_3(z) = z e^z - e^z + c_4 \quad (c_4 \in \mathbb{R})$

Schließlich

$U(x,y,z) = \cosh(x+y) + \frac{1}{2} x^2 y^2 z^2 - \cos y + (z-1) e^z + c_4 \qquad (c_4 \in \mathbb{R})$

$U(0,0,0) = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 + 0 - 1 + c_4 = 0 \Leftrightarrow c_4 = 1$

Gesuchtes Pot. zu $\vec{v}$ ist: $U(x,y,z) = \cosh(x+y) + \frac{1}{2} x^2 y^2 z^2 - \cos y + (z-1) e^z + 1$

c)
$U(0,0,1) = 1 + 0 - 1 + e - e + 1 = 1$ d.h. $c_0 = 1$ bzw. $(0,0,1) \in N_1$

Der Normalenvektor der Tangentialebene ist durch grad $U(0,0,1)$ bzw. $\vec{v}(0,0,1)$ gegeben.

$\vec{v}(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} \Rightarrow$ TE: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (z-1)e = 0 \Leftrightarrow z = 1$