UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Herbst 2003
22.09.2003

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

a) Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren, sowie algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte.

b) Bestimme die orthogonale Projektion der Geraden

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

auf die Ebene

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\}.$$

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Betrachte

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 4yz + 5z^2 - 4z + 4.$$

a) Bestimme die Extremstellen von f. Handelt es sich jeweils um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt ?

b) Bestimme die Extremstellen von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) = z = 0$ und $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Untersuche mittels geometrischer Überlegungen, welche der Extremstellen ein Maximum und welche ein Minimum sind.

c) Berechne das Kurvenintegral 1. Art

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds$$

entlang des Weges

$$\mathbf{c} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Bestimme das Volumen, welches durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 9$ und das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ eingeschlossen wird.

b) Bestimme das Oberflächenintegral 2. Art

$$\int_S \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do,$$

wobei

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und S die Seitenfläche des Zylinders, d.h.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ 0 \leq x_3 \leq 1\}.$$

c) Bestätige das Ergebnis aus Teilaufgabe b) mittels des Satzes von Gauß unter Verwendung elementargeometrischer Überlegungen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachte

$$f(x, y) = \sin y + xy.$$

a) Kann $f(x, y) = 0$ an der Stelle

$$(x, y) = (0, \pi) \qquad \text{nach} \qquad y = y(x)$$

aufgelöst werden? Begründung.

b) Bestimme mittels implizitem Differenzieren $y'(x)$ und $y''(x)$ an der Stelle $x = 0$.

c) Es sei $y = y(x)$ für $x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$ bekannt. Berechne das Kurvenintegral 2. Art

$$\int_{\mathbf{c}} < \begin{pmatrix} f(x, y) \\ -f(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} >$$

entlang des Weges

$$\mathbf{c} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad -\frac{1}{10} \leq t \leq \frac{1}{10}.$$

d) Bestimme die Richtungsableitung von f im Punkt $(x, y) = (0, \pi)$ in Richtung des Einheitstangentenvektors an die Auflösung $(x, y(x))$ in $(0, \pi)$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomsklausuren hängen ab **Montag, dem 6. Oktober 2003**, vor dem Sekretariat aus und finden sich im Internet

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html.`

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am **Dienstag, dem 14. Oktober 2003, von 13.15 - 13.45 Uhr** im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.
Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.
Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom **20. Oktober bis 24. Oktober 2003**.