UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. Guido Schneider
Dipl.-Math. Oliver Zink
Dipl.-Math. oec Norbert Breindl

SS 2003
22.09.2003

Lösungsvorschläge zur Vordiplomsprüfung
in Höherer Mathematik II
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) + (1-\lambda) =$

$(1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)+1] = (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0 \implies$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2$

$$\lambda_1 = 1: \quad (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v_1} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{2,3} = 2: \quad (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v_2} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es ist: $\dim E_1 = g(1) = 1 = a(1)$ und $\dim E_2 = g(2) = 1 \neq 2 = a(2)$

b) Für die Ebene E gilt: $E = \text{span}\,\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, mit $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die beiden Vektoren sind bereits orthogonal gewählt.

Orthonormierung liefert:

$\tilde{\mathbf{w}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{w}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Projektionsmatrix $\mathbf{P} = \sum\limits_{n=1}^{2} \tilde{\mathbf{w}}_i \tilde{\mathbf{w}}_i^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Projektion von zwei Punkten der Gerade g auf Ebene E: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt bereits in E,

für $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

orthogonale Projektion: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 **a)** grad $f(x,y,z) = (8x,\, 2y-4z, -4y+10z-4) = 0 \implies x = 0,\, y = 4, z = 2$

$\mathbf{H}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}$ positiv definit (alle Hauptabschnittsdeterminanten positiv)

$\det(8) = 8,\ \det\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 16,\ \det\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} = 32$

$\Longrightarrow$ Minimum bei $(0,\,4,\,2)^T$

b) Regularitätsbedingung: $\text{rg}\,(\mathbf{Jg}(x,y,z)) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} = 2$
Wir setzen die Nebenbedingung g_1 ein:
$F(x,y,\mu) = 4x^2 + y^2 + 4 + \mu(x^2 + y^2 - 1)$
$\text{grad}\, F(x,y,\mu) = (8x + 2\mu x, 2y + 2\mu y, x^2 + y^2 - 1) = (0,0,0)$
mögliche Extremwerte: $P_{1,2} = (\pm 1, 0, 0)$, $P_{3,4} = (0, \pm 1, 0)$, erfüllen Regularitätsbedingung. Da die Nebenbedingungsmenge $g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ein Kreis und somit kompakt ist, werden Maximum und Minimum angenommen. Wegen $f(P_{1,2}) = 8$ und $f(P_{3,4}) = 5$ liegen die Maxima in den Punkten $P_{1,2}$ und die Minima in den Punkten $P_{3,4}$.

c) $\int\limits_{\mathbf{c}} f(x,y,z)\,ds = \int\limits_0^1 f(\mathbf{c}(t))\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\,dt = \int\limits_0^1 (4t^2 + t^2 + 4)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\big[\frac{5}{3}t^3 + 4t\big]\Big|_0^1 = \frac{17}{3}\sqrt{2}$

Aufgabe 3 **a)** Wir betrachten das Paraboloid als Rotation um die $z-$Achse:
$V = \frac{\pi}{4}\int_0^9 (\sqrt{z})^2\,dz = \frac{\pi}{4}\frac{z^2}{2}\Big|_0^9 = \frac{81}{8}\pi$ oder:
Einführung von Zylinderkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$
$V = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^3\int\limits_{r^2}^9 r\ dz\,dr\,d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^3 (9r - r^3)\,dr\,d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}(\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4)\big|_0^3\,d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}(\frac{81}{2} - \frac{81}{4})\,d\varphi$
$= \frac{81}{8}\pi$

b) Parametrisierung der Mantelfläche S:

$$\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}(\varphi, x_3) = (\cos\varphi, \sin\varphi, x_3)$$

mit $D = \left\{\begin{pmatrix} \varphi \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \varphi \le 2\pi \ \wedge\ 0 \le x_3 \le 1\right\}$

Äußere Normalenrichtung zu S:

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial x_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int\limits_S \mathbf{f}(\mathbf{x})\,do = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 < \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} > dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 1\,dr\,d\varphi = 2\pi$$

c) Da Normalenvektor auf Deckel D und Boden B senkrecht auf $\mathbf{f}$ gilt:
$\int\limits_B \mathbf{f}(\mathbf{x})\,do = 0$ und $\int\limits_D \mathbf{f}(\mathbf{x})\,do = 0$.
Mit Zylinderkoordinaten, $\text{div}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2$ ergibt sich durch Integration über den Vollzylinder Ω:
$\int\limits_\Omega \text{div}\ \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 2r\,dx_3\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 2r\,dr\ \varphi = 2\pi$

Aufgabe 4 **a)** $f(x,y) = \sin y + xy$ erfüllt Regularitätsbedingung in $(x,y) = (0,\pi)$, da $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos y + x \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = -1 \neq 0$. Es gibt somit Umgebung U von $x_0 = 0$ und Umgebung V von $y_0 = \pi$, $U \times V \subset \mathbb{R}^2$ sowie eine stetige Funktion $y : U \to V$ mit $y(0) = \pi$ und $f(x, y(x)) = 0\ \forall x \in U$

b) $y'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi)} = -\frac{\pi}{-1} = \pi$
1. Ableitung: $\cos(y(x))y'(x) + y(x) + xy'(x) = 0$

2. Ableitung: $-\sin(y(x))(y'(x))^2 + \cos(y(x))y''(x) + 2y'(x) + xy''(x) = 0$
$y''(x) = \frac{\sin(y(x))(y'(x))^2 - 2y'(x)}{\cos(y(x))+x} \implies y''(0) = \frac{-2\pi}{-1} = 2\pi$

c)

$$\int\limits_{\mathbf{c}} < \begin{pmatrix} f(x,y) \\ -f(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} > = \int\limits_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} > dt = 0,$$

weil $f(x,y) = 0$ nach Satz über implizite Funktionen

d) $D_{\mathbf{v}} f(x,y) = \text{grad } f(x,y)\mathbf{v} = (\pi, -1)\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix} = 0$