Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und berechnen Sie B^{-1}.

b) Bestätigen Sie, dass die Abbildung

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -9x_1 + 14x_2 - 6x_3 \\ 7x_1 - 11x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

linear ist.

c) Geben Sie die Abbildungsmatrix $A_{E_2E_3}(\vec{f})$ von $\vec{f}$ bezüglich der kanonischen Basis E_2 des $\mathbb{R}^2$ und der kanonischen Basis E_3 des $\mathbb{R}^3$ an.

d) Begründen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis C des $\mathbb{R}^3$ bilden, und berechnen Sie die Abbildungsmatrix $A_{E_2C}(\vec{f})$ bezüglich E_2 und C.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

unterliege den beiden Nebenbedingungen

$$x + y = 2,\ x + z = -5 \,.$$

a) Berechnen Sie alle Punkte des $\mathbb{R}^3$, in denen f Extremwerte mit diesen Nebenbedingungen besitzen kann.

b) Bestimmen Sie mit genauer Begründung die Extremalpunkte, sowie Wert und Art der Extremwerte von f unter den angegebenen Nebenbedingungen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben ist das von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, abhängende Vektorfeld $\vec{v}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{v}_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+y^\alpha) \\ 4xy + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\alpha = \alpha_0$ derart, dass $\vec{v}_{\alpha_0}$ ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie in diesem Fall die zugehörenden Potentialfunktionen.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \vec{v}_3 d\vec{x}\ ,$$

wobei Γ die von $(0,0)$ ausgehende Verbindungsgerade der Punkte $(0,0)$ und $(1,-1)$ ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Durch die Ungleichungen

$$3 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, \quad x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, z \geq 0$$

ist ein beschränkter Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ mit der Randfläche $F = \partial B$, und durch $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz \\ 2yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

ein Vektorfeld $\vec{v}$ gegeben.

a) Berechnen Sie den Fluß

$$\iint_F \vec{v}\vec{N}_0 dF,$$

von $\vec{v}$ durch F, wobei $\vec{N}_0$ der äußere Normaleinheitsvektor von B ist.

b) F_1 ist das in der x,y–Ebene liegende Teilflächenstück von F. Bestimmen Sie

$$\iint_{F_1} \vec{v}\vec{N}_0 dF\ .$$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die **Ergebnisse** der Vordiplomklausuren hängen ab Montag, dem 11. Oktober 2004, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die **Klausureinsicht** findet für diejenigen, die sich einer **mündlichen Nachprüfung** stellen müssen, am Dienstag, dem 19. Oktober 2004, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.

Die **Allgemeine Klausureinsicht** für alle übrigen findet, am Mittwoch, dem 03. November 2004, von 15.45 bis 17.15 im S 33 (Mathematikgebäude)statt.

Die **Nachprüfungen** selbst sind in der Woche vom 25. bis 29. Oktober 2004.