Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
— L ö s u n g e n —

Aufgabe 1

a) Gaußscher Algorithmus:

1	0	0	.	1	2	4	
0	1	0	.	2	3	3	$(Z_2 : Z_2 - 2Z_1)$
0	0	1	.	3	4	1	$(Z_3 : Z_3 - 3Z_1)$
1	0	0	.	1	2	4	$(Z_1 : Z_1 + 2Z_2)$
-2	1	0	.	0	-1	-5	
-3	0	1	.	0	-2	-11	$(Z_3 : Z_3 - 2Z_2)$
-3	2	0	.	1	0	-6	$(Z_1 : Z_1 - 6Z_3)$
-2	1	0	.	0	-1	-5	$(Z_2 : Z_2 - 5Z_3)$
1	-2	1	.	0	0	-1	
-9	14	-6	.	1	0	0	
-7	11	-5	.	0	-1	0	
1	-2	1	.	0	0	-1	

Wir erhalten also:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 14 & -6 \\ 7 & -11 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Mit den kanonischen Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des $\mathbb{R}^3$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \vec{f}(\vec{e}_i) &= \alpha_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 14 \\ -11 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9\alpha_1 + 14\alpha_2 - 6\alpha_3 \\ 7\alpha_1 - 11\alpha_2 + 5\alpha_3 \end{pmatrix} = \vec{f}\Big(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \vec{e}_i \Big) \end{aligned}$$

c) Unmittelbar aus b) ergibt sich

$$A_{E_2 E_3}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} -9 & 14 & -6 \\ 7 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Die vorgegebenen Vektoren sind gerade die Spaltenvektoren von B aus a). Da B regulär ist, ist C eine Basis des $\mathbb{R}^3$, und es gilt

$$A_{E_3 C} = A_{E_3 B}.$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
A_{E_2C}(\vec{f}) &= A_{E_2E_3}(\vec{f})A_{E_3C} \\
&= \begin{pmatrix} -9 & 14 & -6 \\ 7 & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

a) Mit

$$
\begin{aligned}
g_1(x,y,z) &:= x + y - 2 = 0 \\
g_2(x,y,z) &:= x + z + 5 = 0
\end{aligned}
$$

ergibt der Lagrange–Formalismus das Gleichungssystem

(1) $2x = \lambda_1 + \lambda_2$
(2) $2y = \lambda_1$
(3) $2z = \qquad \lambda_2$
(4) $x + y = 2$
(5) $x + z = -5$.

Setzen wir λ_1, λ_2 aus (2), (3) in (1) ein, dann erhalten wir mit (4), (5) das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x - y - z &= 0 \\
x + y \phantom{{}-z} &= 2 \\
x \phantom{{}-y} + z &= -5
\end{aligned}
$$

mit der eindeutig bestimmten Lösung

$$x = -1,\ y = 3,\ z = -4\ .$$

Damit kann f nur im Punkt $(-1, 3, -4)$ ein Extremum besitzen.

b) f ist im $\mathbb{R}^3$ durch 0 nach unten beschränkt und für $|(x,y,z)| \to \infty$ nach oben unbeschränkt.

Damit ist f auf

$$\{(x,y,z) \mid g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\}$$

nach unten beschränkt, nach oben unbeschränkt, und nimmt als stetige Funktion ein Minimum an. Also ist

$$f(-1, 3, -4) = 26$$

Minimum von f unter den vorgegebenen Nebenbedingungen.

Aufgabe 3

a) Mit $\vec{v}_\alpha = (P_\alpha, Q_\alpha)^T$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} P_\alpha = 2\alpha y^{\alpha-1},\ \frac{\partial}{\partial x} Q_\alpha = 4y\ .$$

Für $\alpha_0 = 2$ ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, und für die zugehörende Potentialfunktionen muss

$$f_x = 2x + 2y^2 \ , \ f_y = 4xy + 3y^2$$

gelten:

$$\begin{aligned} & f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + c(y) \\ & \Longrightarrow f_y = 4xy + c'(y) \stackrel{!}{=} 4xy + 3y^2 \Longrightarrow c'(y) = 3y^2 \Longrightarrow c(y) = y^3 + C \end{aligned}$$

Also sind

$$f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + y^3 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

die zu $\vec{v}_2$ gehörenden Potentialfunktionen.

b) Direkte Berechnung des Kurvenintegrals:

$$\Gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \ , \ 0 \to t \to 1 \ , \ \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3|_\Gamma = \begin{pmatrix} 2t - 2t^3 \\ -t^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{v}_3|_\Gamma \cdot \dot{\vec{x}} = 2t + t^2 - 2t^3$$

$$\begin{aligned} & \Longrightarrow \int\limits_\Gamma \vec{v}_3 \, d\vec{x} = (t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4)|_0^1 \\ & = \frac{5}{6} \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Integralsatz von Gauß:

$$\iint\limits_F \vec{v}\vec{N}_0 \, dF = \iiint\limits_B \operatorname{div} \vec{v} \, dB$$

mit

$$\operatorname{div} \vec{v} = 4z \ .$$

Als Teilbereich einer Hohlkugel beschreibt man B zweckmäßigerweise durch Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} & x = r \cos\varphi \sin\Theta \\ & y = r \sin\varphi \sin\Theta \ , \ \sqrt{3} \le r \le \sqrt{5} \ , \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \le \Theta \le \frac{\pi}{2} \\ & z = r \cos\Theta \end{aligned}$$

sowie

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\Theta)} = -r^2 \sin\Theta \ .$$

Es folgt

$$\iiint\limits_B \operatorname{div}\vec{v}\,dB = 4\int\limits_{\Theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\Theta\cdot r^2\sin\Theta\,d\varphi dr d\Theta$$

$$= 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} r^3\sin\Theta\cos\Theta\,dr d\Theta = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(r^4|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}})\sin\Theta\cos\Theta\,d\Theta$$

$$= 8\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\Theta|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\pi = \iint\limits_F \vec{v}\vec{N}_0 dF$$

b) F_1 ist der Viertelskreisring

$$F_1 = \{(x,y,0)\mid 3\le x^2+y^2\le 5\ ,\ x\ge 0\ ,\ y\ge 0\}\ .$$

Es gilt

$$\vec{v}|_{F_1} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ x^2+y^2\end{pmatrix}\ ,\ \vec{N}_0 = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -1\end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{N}_0|_{F_1} = -(x^2+y^2)$$

$$\Longrightarrow \iint\limits_{F_1}\vec{v}\vec{N}_0\,dF = -\iint_{F_1}(x^2+y^2)\,dxdy.$$

Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$\iint\limits_{F_1}\vec{v}\vec{N}_0\,dF = -\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\,d\varphi dr = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}\,r^4|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}$$

$$= -2\pi\ .$$