UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2009
21.09.2009

Diplom–Vorprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Diplomingenieurpädagogik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.

b) Untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist. Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix S und ihre Inverse S^{-1} so an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + xy^2 - y^2\,.$$

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema von f und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

b) Die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x,y) = xy - 2(x^2 + y^2)\,.$$

Betrachten Sie g auf der Menge

$$S = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2 + y^2 = 8\big\}\,.$$

Begründen Sie, dass g auf S ihr Maximum und Minimum annimmt, und berechnen Sie diese.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+z^2}\sin(y) + e^x \arctan(z) \\ 2 + e^{x^2+z^2}\cos(y) \\ 2ze^{x^2+z^2}\sin(y) + \dfrac{e^x}{1+z^2} \end{pmatrix},$$

und die Kurve

$$\gamma\colon [0, 1/2] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.$$

– bitte wenden –

b) Die Oberfläche des Zylinders

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 1, \; -1 \leqslant z \leqslant 2\}$$

werde mit $\mathcal{F}$ bezeichnet. Ferner sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2 y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

gegeben. Bestimmen Sie

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do,$$

wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor an $\mathcal{F}$ sei, der ins Äußere von Z weise.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 e^y).$$

i) Begründen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist.

ii) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ von f im Punkt $x^0 = (1, 0)$ in Richtung $v = (1, \ln(2))$.

b) Definiere

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, \; x^2 \leqslant y \leqslant 4 - x^2\}.$$

Skizzieren Sie B und berechnen Sie

$$\iint_B 2xy \, d(x, y).$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, den **13.10.2009**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den **21.10.2009**, von 14:00 Uhr bis 16:00 Uhr im HS 93 (Gebäude 10.81) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 26.10.2009 bis 30.10.2009 im Allianz-Gebäude 05.20.