Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2013
05.03.2013

Bachelor-Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 **($5+2+3=10$ Punkte)**

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix P sowie deren Inverse P^{-1} so an, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

c) Sei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det B = 1$ und $\operatorname{Spur} B = -2$. Berechnen Sie die Eigenwerte von B. Ist B diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 **($5+5=10$ Punkte)**

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Entscheiden Sie bei den lokalen Extremstellen, ob es sich dabei um Minimal- oder Maximalstellen handelt.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Untersuchen Sie den Limes

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,h) + f(-h,h) + f(-h,-h) + f(h,-h) - 4f(0,0)}{h^2}$$

auf Existenz und berechnen Sie ihn gegebenenfalls (*Hinweis:* Taylorentwicklung).

Aufgabe 3 **($3+4+3=10$ Punkte)**

a) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+x+yz \\ 1+y+xz \\ 1+z+xy \end{pmatrix}$, und die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(\pi t^2) \\ \frac{t}{2-t} \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

– bitte wenden –

b) Sei $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq 1, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$. Mit $\mathcal{F}$ sei die Oberfläche ∂G von G bezeichnet, wobei der Normalenvektor $\vec{N}$ nach außen orientiert sei. Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$.

c) Seien G und $\mathcal{F}$ wie in (b) und das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do.$$

Aufgabe 4 (6 + 4 = 10 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \oint_{|z+1+i|=2} \frac{1}{z^4-1}\, dz, \qquad \text{(ii)} \oint_{|z|=2} z^2 \cos\left(\frac{1}{z-1}\right) dz,$$

wobei die Kreislinien jeweils positiv orientiert sind und einmal durchlaufen werden.

b) Seien $a, b > 0$. Die Funktion $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a} & \text{für } x \in [0,a] \\ 1 + \frac{x}{b} & \text{für } x \in [-b,0] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\mathscr{F} f_{a,b}$ von $f_{a,b}$.

Ist $\mathscr{F} f_{a,b}$ absolut integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie gegebenenfalls $\int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F} f_{a,b})(\xi)\, d\xi$.

Geben Sie für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ an, wie sich $(\mathscr{F} f_{a,a})(\xi)$ für $a \to \infty$ verhält.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, den 26.03.2013, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 17.04.2013, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Benz-Hörsaal (Gebäude 10.21) statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 22.04.2013 bis 26.04.2013 im Allianz-Gebäude 05.20.