Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2013
05.03.2013

Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 $\quad$ (5 + 2 + 3 = 10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix P sowie deren Inverse P^{-1} so an, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

c) Sei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det B = 1$ und $\operatorname{Spur} B = -2$. Berechnen Sie die Eigenwerte von B. Ist B diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(\lambda-2)^2-25] = (2-\lambda)(\lambda-7)(\lambda+3).$$

Eigenwerte sind also $2, 7, -3$ und haben jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit 1. Bestimmung der Eigenräume:

$$\begin{aligned}
E_A(2) &= \operatorname{Kern}(A-2I) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \\
E_A(7) &= \operatorname{Kern}(A-7I) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \\
E_A(-3) &= \operatorname{Kern}(A+3I) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

b) Die Matrix A ist symmetrisch und also nach Vorlesung orthogonal diagonalisierbar. Man erhält ein P, indem man die normierten Eigenvektoren aus Teil a) als Spalten nimmt:

$$P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 5/\sqrt{2} & -5/\sqrt{2} \\ 3 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Für die Inverse gilt aufgrund der Orthogonalität

$$P^{-1} = P^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3/\sqrt{2} & 5/\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & -5/\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

c) Die Eigenwerte von B seien μ_1 und μ_2. Die Determinante ist das Produkt und die Spur ist die Summe der Eigenwerte, also $\mu_1\mu_2 = 1$, $\mu_1 + \mu_2 = -2$. Es folgt $\mu_1 = 1/\mu_2$, $\mu_{1/2}^2 + 2\mu_{1/2} + 1 = 0$, also $\mu_{1/2} = -1$. Die Diagonalisierbarkeit von B lässt sich so noch nicht entscheiden, wie man an den Beispielen $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (diagonalisierbar) und $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (nicht diagonalisierbar) sehen kann.

Aufgabe 2 $\quad$ (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Entscheiden Sie bei den lokalen Extremstellen, ob es sich dabei um Minimal- oder Maximalstellen handelt.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Untersuchen Sie den Limes

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,h) + f(-h,h) + f(-h,-h) + f(h,-h) - 4f(0,0)}{h^2}$$

auf Existenz und berechnen Sie ihn gegebenenfalls (*Hinweis:* Taylorentwicklung).

Lösungsvorschlag

a) Die Funktion f ist beliebig oft stetig differenzierbar. Die partiellen Ableitungen lauten

$$f_x(x,y) = 2x(1 - (x^2 + 2y^2))e^{-(x^2+y^2)}, \quad f_y(x,y) = 2y(2 - (x^2 + 2y^2))e^{-(x^2+y^2)}.$$

Somit ist $f_x = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $x^2 + 2y^2 = 1$; und $f_y = 0$ ist äquivalent zu $y = 0$ oder $x^2 + 2y^2 = 2$. Die Nullstellen des Gradienten sind somit $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0)$. Wegen $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) > 0$ für $(x,y) \neq (0,0)$ ist bei $(0,0)$ ein (sogar globales) Minimum. Die zweiten Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= (2(1 - (x^2 + 2y^2)) - 4x^2 - 4x^2(1 - (x^2 + 2y^2)))e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{yy} &= (2(2 - (x^2 + 2y^2)) - 8y^2 - 4y^2(2 - (x^2 + 2y^2)))e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{xy} &= (-8xy - 4xy(1 - (x^2 + 2y^2)))e^{-(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

Damit berechnen wir für die Hessematrizen

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}, \quad H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -8/e \end{pmatrix}.$$

Man liest ab: $H_f(0,0)$ ist positiv definit, $H_f(\pm 1, 0)$ ist indefinit, $H_f(0,\pm 1)$ ist negativ definit. Also hat f in $(0,\pm 1)$ lokale Maximalstellen, in $(0,0)$ eine lokkale Minimalstelle und in $(\pm 1, 0)$ Satttelpunkte.

Dass f in $(\pm 1, 0)$ Sattelpunkte hat, kann man auch daran sehen, dass $x \mapsto f(x,0) = x^2 e^{-x^2}$ in $x = \pm 1$ lokale (soagr globale) Maximalstellen hat und dass für $x^2 + y^2 = 1$ gilt $f(x,y) = (1 + y^2)/e$, was lokale (echte) Minimalstellen für $y = 0$ hat.

b) Seien $\sigma, \tau \in \{-1, 1\}$ und $h \neq 0$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein $\vec{\xi} = \vec{\xi}(h, \sigma, \tau)$ auf der Verbindungsstrecke von $(0, 0)$ und $(\sigma h, \tau h)$ so, dass

$$f(\sigma h, \tau h) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(H_f(\vec{\xi})\begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet man den Ausdruck im gesuchten Limes mit $A(h)$, so hat man also

$$A(h) = \frac{1}{h^2}\left(\nabla f(0,0) \cdot \underbrace{\sum_{\sigma,\tau \in \{-1,1\}} \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}}_{=\vec{0}} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau \in \{-1,1\}} \left(H_f(\vec{\xi}(h,\sigma,\tau))\begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}\right).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}\left(H_f(\vec{\xi})\begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix} &= \frac{1}{h^2}\left(\sigma^2 h^2 f_{xx}(\vec{\xi}) + 2\sigma\tau h^2 f_{xy}(\vec{\xi}) + \tau^2 h^2 f_{yy}(\vec{\xi})\right) \\ &= (\Delta f)(\vec{\xi}) + 2\sigma\tau f_{xy}(\vec{\xi}) \longrightarrow \Delta f(0,0) + 2\sigma\tau f_{x,y}(0,0) \end{aligned}$$

für $h \to 0$. Also ist der gesuchte Limes

$$\lim_{h\to 0} A(h) = 2(\Delta f)(0,0) + f_{xy}(0,0) \underbrace{\sum_{\sigma,\tau \in \{-1,1\}} \sigma\tau}_{=0} = 2(\Delta f)(0,0).$$

Aufgabe 3 $\quad$ (3 + 4 + 3 = 10 Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+x+yz \\ 1+y+xz \\ 1+z+xy \end{pmatrix}$, und die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(\pi t^2) \\ \frac{t}{2-t} \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

b) Sei $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq 1, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Mit $\mathcal{F}$ sei die Oberfläche ∂G von G bezeichnet, wobei der Normalenvektor $\vec{N}$ nach außen orientiert sei. Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$.

c) Seien G und $\mathcal{F}$ wie in (b) und das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do.$$

Lösungsvorschlag

a) Das Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ist beliebig oft auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbar und es gilt:

$$(v_1)_y = z = (v_2)_x, \ (v_1)_z = y = (v_3)_x, \ (v_2)_z = x = (v_3)_y.$$

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Ein Potential $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zu $\vec{v}$ ist gegeben durch

$$F(x, y, z) = x + x^2/2 + xyz + y + y^2/2 + z + z^2/2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Für das Integral erhält man also

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(1, 0, 1) - F(0, 0, 0) = 3.$$

b) G ist eine Halbkugel mit Radius 2 um $\vec{0}$, aus welcher der Zylinder $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1\}$ "ausgebohrt" ist. Die Oberfläche von G besteht also aus drei Teilen: dem Kreisring in der (x, y)-Ebene, dem Zylindermantel parallel zur z-Achse und einem Teil der Kugeloberfläche.

Fläche des Kreisringes: $\pi 2^2 - \pi 1^2 = 3\pi$.

Fläche des Zylindermantels: $2\pi \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi$.

Wir parametrisieren den Teil der Kugeloberfläche über dem Kreisring $\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ durch $f(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ und erhalten für das Flächenelement

$$\begin{aligned} do &= \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - (x^2 + y^2)} + \frac{y^2}{4 - (x^2 + y^2)}}\, dx\, dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich diese Oberfläche mittels Polarykoordinaten als

$$\iint\limits_{\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}} \frac{2}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}}\, dr\, d\phi = 4\pi \left[-(4 - r^2)^{1/2} \right]_{r=1}^{r=2} = 4\pi\sqrt{3}.$$

Wir erhalten als Flächeninhalt von $\mathcal{F}$: $(3 + 6\sqrt{3})\pi$.

c) Wir verwenden den Divergenzsatz

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{w}\, d\tau.$$

Dabei gilt

$$\operatorname{div} \vec{w}(x, y, z) = 2z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Wir erhalten somit wieder mit Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_G z\, d\tau &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4 - r^2}} 2z\, dz\, r\, rd\, d\phi = 2\pi \int_1^2 (4 - r^2) r\, dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{4}(4 - r^2)^2 \right]_{r=1}^{r=2} = \frac{9}{2}\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (6 + 4 = 10 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \oint_{|z+1+i|=2} \frac{1}{z^4-1}\,dz, \qquad \text{(ii)} \oint_{|z|=2} z^2 \cos\left(\frac{1}{z-1}\right) dz,$$

wobei die Kreislinien jeweils positiv orientiert sind und einmal durchlaufen werden.

b) Seien $a, b > 0$. Die Funktion $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a} & \text{für } x \in [0, a] \\ 1 + \frac{x}{b} & \text{für } x \in [-b, 0] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\mathscr{F} f_{a,b}$ von $f_{a,b}$.

Ist $\mathscr{F} f_{a,b}$ absolut integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie gegebenenfalls $\int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F} f_{a,b})(\xi)\, d\xi$.

Geben Sie für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ an, wie sich $(\mathscr{F} f_{a,a})(\xi)$ für $a \to \infty$ verhält.

Lösungsvorschlag

a) (i) Es gilt $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$. Somit sind $1, -1, i, -i$ alle Singularitäten von $F(z) = \frac{1}{z^4-1}$ und jeweils einfache Polstellen. Die Menge $\{|z+1+i|\}$ ist ein Kreisring um $-1-i$ mit Radius 2. Innerhalb dieses Kreises liegen nur die Singularitäten -1 und $-i$. Somit gilt nach dem Residuensatz:

$$\oint_{|z+1+i|=2} \frac{1}{z^4-1}\, dz = 2\pi i(\operatorname{res}(F; -1) + \operatorname{res}(F; -i)).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(F; -1) &= \lim_{z \to -1} \frac{z+1}{z^4-1} = \frac{1}{(-1)^2+1}\frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{4}, \\ \operatorname{res}(F; -i) &= \lim_{z \to -i} \frac{z+i}{z^4-1} = \frac{1}{(-i)^2-1}\frac{1}{-i-i} = \frac{1}{4i}. \end{aligned}$$

Also ist das Integral $= 2\pi i(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4i}) = \frac{\pi}{2}(1-i)$.

(ii) Die Funktion $F(z) = z^2 \cos(\frac{1}{z-1})$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph, und es gilt

$$\begin{aligned} F(z) &= ((z-1)+1)^2 \cos(\frac{1}{z-1}) = ((z-1)^2 + 2(z-1) + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{-2k+2} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{-2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{-2k}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $\operatorname{res}(F; 1)$ stellt man fest, dass nur in der zweiten Laurentreihe ungerade Exponenten vorkommen. Den Exponenten -1 hat man dort gerade für $k = 1$, so dass $\operatorname{res}(F; 1) = 2(-1)/2! = -1$ gilt. Nach dem Residuensatz ist also

$$\oint_{|z|=2} z^2 \cos\left(\frac{1}{z-1}\right) dz = 2\pi i \operatorname{res}(F; 1) = -2\pi i.$$

b) Die Funktion $f_{a,b}$ ist stetig und absolut integrierbar. Für $\xi \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}(\mathscr{F} f_{a,b})(\xi) &= \int_{-b}^{0} e^{-ix\xi}(1+\frac{x}{b})\,dx + \int_{0}^{a} e^{-ix\xi}(1-\frac{x}{a})\,dx \\ &= \int_{0}^{a} e^{-ix\xi}(1-\frac{x}{a})\,dx + \int_{0}^{b} e^{ix\xi}(1-\frac{x}{b})\,dx.\end{aligned}$$

Für $\xi = 0$ erhalten wir $(\mathscr{F} f_{a,b})(\xi) = \frac{a+b}{2}$. Für $\xi \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{0}^{a} e^{-ix\xi}(1-\frac{x}{a})\,dx &= \frac{-1}{i\xi} e^{-ix\xi}(1-\frac{x}{a})\Big|_{0}^{a} - \frac{1}{ia\xi}\int_{0}^{a} e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{i\xi} - \frac{1}{ia\xi}\cdot\frac{-1}{i\xi}e^{-ix\xi}\Big|_{0}^{a} \\ &= \frac{1}{i\xi} + \frac{1-e^{-ia\xi}}{a\xi^2},\end{aligned}$$

und also

$$(\mathscr{F} f_{a,b})(\xi) = \frac{1-e^{-ia\xi}}{a\xi^2} + \frac{1-e^{ib\xi}}{b\xi^2}.$$

Nach Vorlesung ist $\mathscr{F} f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, außerdem gilt für $|\xi| \geq 1$: $|(\mathscr{F} f_{a,b})(\xi)| \leq (\frac{2}{a} + \frac{2}{b})|\xi|^{-2}$. Somit ist $\mathscr{F} f_{a,b}$ absolut integrierbar. Nach der Fourierinversionsformel ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F} f_{a,b})(\xi)\,d\xi = 2\pi f_{a,b}(0) = 2\pi.$$

Schließlich gilt $\lim_{a\to\infty}(\mathscr{F} f_{a,a})(\xi) = 0$ für $\xi \neq 0$ und $(\mathscr{F} f_{a,a})(0) = a \to \infty$ für $\xi = 0$.