Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2013/14
07.03.2014

Klausur

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ((6+4) Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\int_E y^2 z \, d\mu,$$

wobei $E \subset \mathbb{R}^3$ das Gebiet ist, das innerhalb der Kugel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9\}$, oberhalb der Ebene $z=0$, und zwischen den Zylindern $x^2+y^2=1$ und $x^2+y^2=4$ liegt.

b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\sqrt[5]{\pi^2}} \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[5]{\pi}} y \sin(x^5)\, dx\, dy.$$

Lösung:

a) Mit Zylinderkoordinaten ist $(x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, wobei $1 < r < 2$, $0 < \varphi < 2\pi$ und $0 < z < \sqrt{9-r^2}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_E y^2 z \, d\mu &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{9-r^2}} r \cdot r^2 (\sin^2\varphi) z \, dz\, dr\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^3 (\sin^2\varphi)(9-r^2)\, dr\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{9}{4} r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right]_1^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi)\, d\varphi \\
&= \frac{93}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 \, d\varphi \\
&= \frac{93}{8}\pi.
\end{aligned}$$

Dabei wurde $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = [-\sin\varphi\cos\varphi]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 - \sin^2\varphi\, d\varphi$ verwendet, also $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi$.

b) Es wird insgesamt integriert über die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant \sqrt[5]{\pi^2}, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt[5]{\pi}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \sqrt[5]{\pi}, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$. Mit Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt[5]{\pi^2}} \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[5]{\pi}} y \sin(x^5)\, dx\, dy &= \int_0^{\sqrt[5]{\pi}} \int_0^{x^2} y \sin(x^5)\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\sqrt[5]{\pi}} \frac{1}{2} x^4 \sin(x^5)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{10} \cos(x^5) \right]_0^{\sqrt[5]{\pi}} \\
&= -\frac{1}{10}(\cos\pi) + \frac{1}{10}\cos 0 = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 ((5+5) Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 2x^3 + x^2 + y^4.$$

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f und deren Typ (lokales Minimum bzw. lokales Maximum).

b) Berechnen Sie das Maximum der Funktion $g(x,y) = x^2y^3$ auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$.

Lösung:

a) Wir betrachten $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x(3x+1), 4y^3)^t = (0,0)^t$. Diese Gleichung hat genau die beiden Lösungen $p_0 = (0,0)$ und $p_1 = (-\frac{1}{3}, 0)$. Also sind dies die beiden einzigen kritischen Punkte. Es gilt $f(x,y) = x^2(2x+1) + y^4$. Für $(x,y) \in B_{\frac{1}{2}}(0)$ gilt $x^2 \geqslant 0$, $2x+1 > 0$, sowie $y^4 \geqslant 0$, also $f(x,y) \geqslant 0$. Wegen $f(0,0) = 0$ liegt also bei p_0 ein lokales Minimum vor.

Betrachte nun $\tilde{f}(x) := f(x,0) = 2x^3 + x^2$. Dann ist $\tilde{f}'(x) = 6x^2 + 2x$, $\tilde{f}''(x) = 12x + 2$, also $\tilde{f}(-\frac{1}{3}) = 0$, $\tilde{f}''(-\frac{1}{3}) = -2$. Somit ist an der Stelle $x = -\frac{1}{3}$ ein striktes lokales Maximum von $\tilde{f}$. Da jedoch an der Stelle $y = 0$ ein striktes lokales Minimum der Funktion $y \mapsto f(0,y) = y^4$ ist, liegt an der Stelle $(-\frac{1}{3}, 0)$ kein lokales Extremum von f vor.

Damit liegt das einzige lokale Extremum von f an der Stelle $(0,0)$ vor und ist ein lokales Minimum mit $f(0,0) = 0$.

b) Da $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ kompakt ist und g stetig, wird das Maximum angenommen. Definiere $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$. Es gilt $\operatorname{rang} Dh(x,y) = \operatorname{rang}(2x, 4y) = 1$ auf K, da sonst $x = y = 0$ wäre. Ferner ist $K = h^{-1}(\{0\})$. Wir wenden nun die Lagrange-Multiplikatorenregel an: Die Gleichung $\operatorname{grad} g(x,y) = \lambda \operatorname{grad} h(x,y)$ führt auf $(2xy^3, 3x^2y^2) = \lambda\,(2x, 4y)$. Zusammen mit der Def. der Menge K erhalten wir die drei Gleichungen

$$xy^3 = \lambda\, x, \qquad 3x^2y^2 = 4\lambda\, y, \qquad x^2 + 2y^2 = 1.$$

Ist $x = 0$, führt Gl. 3 zu $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ist $y = 0$ führt Gl. 3 zu $x = 1$ oder $x = -1$. Ist $x \neq 0$ und $y \neq 0$, führt Gl. 1 zu $\lambda = y^3$; Gl. 2 führt dann auf $3x^2 = 4y^2$. Schließlich führt Gl. 3 auf $|x| = \sqrt{\frac{2}{5}}$ und $|y| = \sqrt{\frac{3}{10}}$. Dies ergibt acht mögliche Extremalstellen. Es gilt

$$g\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{3}{10}}\right) = g\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{3}{10}}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Für alle anderen möglichen Extremalstellen nimmt g Werte $\leqslant 0$ an. Damit ist $\frac{2}{5}\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{3}{2}}$ das Maximum von g auf K.

Aufgabe 3 ((6+4) Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{2+\sin(xy^2)}$.

i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$.

ii) Berechnen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung der Funktion f im Entwicklungspunkt $(\pi^3, \frac{1}{\pi})$.

b) Für $\varrho > 0$ sei $B_\varrho = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < \varrho^2\}$. Sei nun $\Omega = B_3 \setminus B_2$. Berechnen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß

$$\int_{\partial\Omega} \left(x^2yz^2 - \frac{1}{2}y^3z^2 + z^2\right) d\sigma.$$

Lösung:

a) i) Wir berechnen

$$\partial_x f(x,y) = -\frac{y^2\cos(xy^2)}{(2+\sin(xy^2))^2} \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = -\frac{2xy\cos(xy^2)}{(2+\sin(xy^2))^2}.$$

ii) Es gilt

$$\begin{aligned} f\left(\pi^3, \frac{1}{\pi}\right) &= \frac{1}{2}, \\ \partial_x f\left(\pi^3, \frac{1}{\pi}\right) &= -\frac{\frac{1}{\pi^2}\cos\pi}{(2+\sin\pi)^2} = \frac{1}{4\pi^2}, \qquad \partial_y f\left(\pi^3, \frac{1}{\pi}\right) = -\frac{2\pi^3\frac{1}{\pi}\cos\pi}{(2+\sin\pi)^2} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= \frac{\partial_x f\left(\pi^3, \frac{1}{\pi}\right)}{1!}\left(x-\pi^3\right) + \frac{\partial_y f\left(\pi^3, \frac{1}{\pi}\right)}{1!}\left(y-\frac{1}{\pi}\right) + \frac{f\left(\pi^3, \frac{1}{\pi}\right)}{0!} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}(x-\pi^3) + \frac{\pi^2}{2}\left(y-\frac{1}{\pi}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Schreiben wir Elemente aus $\mathbb{R}^3$ als Spaltenvektoren, so ist die äußere Normale an der Stelle $(x,y,z)^t \in \partial B_\varrho$ bezüglich der Menge B_ϱ gegeben durch $\frac{1}{\varrho}(x,y,z)^t$. Wir wenden den Satz von Gauß einmal auf die Vollkugel B_2 und einmal auf die Vollkugel B_3 an (*nicht* auf den Annulus $B_3 \setminus B_2$); wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega}\left(x^2yz^2 - \frac{1}{2}y^3z^2 + z^2\right)d\sigma &= 2\int_{\partial B_2}\begin{pmatrix} xyz^2 \\ -\frac{1}{2}y^2z^2 \\ z \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}d\sigma \\ &\quad +3\int_{\partial B_3}\begin{pmatrix} xyz^2 \\ -\frac{1}{2}y^2z^2 \\ z \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}d\sigma \\ &= 2\int_{B_2}\operatorname{div}\begin{pmatrix} xyz^2 \\ -\frac{1}{2}y^2z^2 \\ z \end{pmatrix}d\mu + 3\int_{B_3}\operatorname{div}\begin{pmatrix} xyz^2 \\ -\frac{1}{2}y^2z^2 \\ z \end{pmatrix}d\mu \\ &= 2\int_{B_2} 1\,d\mu + 3\int_{B_3} 1\,d\mu \\ &= 2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 + 3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = \frac{388}{3}\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 ((6+4) Punkte)

a) Sei $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 3,\ y^2+z^2 = 1+(x-1)^2\}$ und sei $K \subset \mathbb{R}^3$ der kompakte Körper, der durch M und die Ebenen $x=0$ und $x=3$ berandet wird. Sei n die stetige Einheitsnormale auf M, die ins Äußere von K zeigt.

Das Vektorfeld G sei gegeben durch $G(x,y,z) = \big(\sin(x^2), -z, y\big)$ und es sei $F = \operatorname{rot} G$. Berechnen Sie den Fluss von F durch die mit n orientierte Fläche M.

b) Sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2\,i + \frac{5}{2}e^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{z^2-3}{z^2(z^2+1)}\,dz.$$

Lösung:

a) Der Fluss ist gegeben durch $\int_M F \cdot n\, d\sigma = \int_M \operatorname{rot} G \cdot n\, d\sigma$. Mit dem Satz von Stokes gilt $\int_M \operatorname{rot} G \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial M} G \cdot \vec{dx}$, wobei ∂M der positiv orientierte Rand von M ist. Der Rand ist gegeben durch $\partial M = \big\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 2\big\} \cup \big\{(3, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 5\big\}$ und wird durch die Kurven und $\gamma_1 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_1(t) = (0, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$ und $\gamma_2 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_2(t) = (3, \sqrt{5}\cos t, -\sqrt{5}\sin t)$ positiv parametrisiert. Also gilt

$$\begin{aligned}
\int_E F \cdot n\, d\sigma &= \int_0^{2\pi} G(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt + \int_0^{2\pi} G(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\sqrt{2}\sin t \cdot \sqrt{2}\sin t + \sqrt{2}\cos t \cdot \sqrt{2}\cos t\Big)\, dt \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \Big(-\sqrt{5}\sin t \cdot \sqrt{5}\sin t + \sqrt{5}\cos t(-\sqrt{5}\cos t)\Big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2\, dt - \int_0^{2\pi} 5\, dt \\
&= -6\pi.
\end{aligned}$$

Der Fluss durch die mit n orientierte Fläche M ist also -6π.

b) Die Funktion $f(z) := \frac{z^2-3}{z^2(z^2+1)}$ besitzt die Singularitäten 0, i und $-i$. Innerhalb von $B_{\frac{5}{2}}(2\,i)$ liegen nur der einfache Pol i und der Pol zweiter Ordnung 0. Es gilt $\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z\to i}[(z-i)f(z)]$ $= \lim_{z\to i} \frac{z^2-3}{z^2(z+i)} = -2\,i$ und $\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}[z^2 f(z)]\right) = \lim_{z\to 0} \frac{8z}{(z^2+1)^2} = 0$. Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_\gamma \frac{z^2-3}{z^2(z^2+1)}\, dz = 2\pi i(-2\,i + 0) = 4\pi.$$