Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS 2014/15
05.03.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1: (3 + 4 + 3 = 10 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A samt ihrer jeweiligen algebraischen Vielfachheit.

(b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert λ von A eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraums $E_A(\lambda)$.

(c) Berechnen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $A = W^2$ gilt.

Aufgabe 2: (5 + (2 + 3) = 10 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\int_S (\nabla \times f)(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x})$ für

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ x \\ xyz \end{pmatrix} \quad \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ S &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 = 1, \, z > 0 \right\}, \end{aligned}$$

wobei der Normaleneinheitsvektor $\vec{n} : S \to \mathbb{R}^3$ stets weg vom Ursprung zeigt.

Hinweis: Man kann hier den Stokes'schen Rotationssatz anwenden.

(b) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $g_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} y(\alpha + yz^3) \\ x(\alpha^2 + 2yz^3 - 2) \\ x(\alpha + 3y^2z^2 - 2) \end{pmatrix} \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Bestimmen Sie die Menge M aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $(\nabla \times g_\alpha)(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(ii) Berechnen Sie für jedes $\alpha \in M$ das Kurvenintegral $\int_\gamma g_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ über den Weg

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{definiert durch} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) \\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) - 1\right)^2 \\ -t^3 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } t \in [0,1].$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: ((1 + 4) + (3 + 2) = 10 Punkte)

(a) Sei $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $Q = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < 1\big\}$ mit $\partial Q = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1 \wedge |y| \leq 1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = 1 \wedge |x| \leq 1\big\}$ und $\overline{Q} = Q \cup \partial Q$.

(i) Begründen Sie, warum f auf $\overline{Q}$ sein Maximum M und Minimum m annimmt.

(ii) Bestimmen Sie m und M, sowie die Mengen $S_m = \big\{(x,y) \in \overline{Q} : f(x,y) = m\big\}$ und $S_M = \big\{(x,y) \in \overline{Q} : f(x,y) = M\big\}$.

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

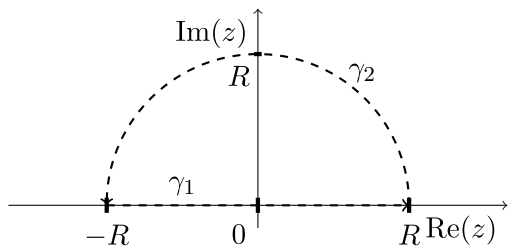
$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\log(1+x^2)\cos(y) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Zeigen Sie: g ist auf $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\big\}$ lokal invertierbar, aber nicht injektiv.

(ii) Sei $g^{(-1)} : U \to V$ eine lokale Inverse von g mit offenen $U \ni g(1,\pi)$ und $V \ni (1,\pi)$. Berechnen Sie $[g^{(-1)}]'(g(1,\pi))$.

Aufgabe 4: ((2 + 2 + 2) + (2 + 2) = 10 Punkte)

(a) Sei $S = \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ und $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus S$. Die regulären Kurven γ_1, γ_2 seien wie in der Skizze mit $R > 1$.



(i) Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ für $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

(ii) Zeigen Sie: $|f(z)| \leq \frac{1}{R^2-1}$ für $z \in \mathrm{Bild}(\gamma_2)$.

(iii) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $g : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) = \cos(\alpha t)$ für alle $t \in (-\pi, \pi]$.

(i) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten $(\alpha_k(g))_{k\in\mathbb{N}_0}$, sowie $(\beta_k(g))_{k\in\mathbb{N}}$ von g:

$$\alpha_k(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(kt)\mathrm{d}t \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \qquad \beta_k(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(kt)\mathrm{d}t \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(ii) Beweisen Sie die Identität $\frac{\cos(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2}\right)$.

Hinweis: Die Fourier-Reihe von g lautet $\frac{\alpha_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k(g)\cos(kt) + \beta_k(g)\sin(kt)]$.

Viel Erfolg!

Ergebnisse der Modulprüfung werden am Freitag, den **10.04.2015**, veröffentlicht.

Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **15.04.2015**, von **16:00 bis 18:00** Uhr im Hörsaal am Fasanengarten (Gebäude 50.35) statt.

Mündliche Nachprüfungen finden in der Woche vom **20.04.2015** bis **24.04.2015** statt.