

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und
Informationstechnik

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y(x) = e^{2x} + x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -\frac{1}{2}y^2(x), \quad x > 0, \quad y(1) = 2.$$

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie mittels des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x+1)y''(x) - (3x+4)y'(x) + (2x+3)y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = e^x$.

Aufgabe 3 (7 + 3 Punkte)

- a) (i) Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $\vec{y}' = A\vec{y}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

- (ii) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} w_1''(t) = -w_1'(t) - w_2(t), \\ w_2'(t) = -w_1(t) + 3w_1'(t) + 2w_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

für $t \in \mathbb{R}$ in das System erster Ordnung aus Teil (i). Geben Sie dann die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (1) an.

- b) Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $e^{\frac{\pi B}{3}}$ über die Reihendarstellung der Matrixexponentialfunktion.

Aufgabe 4 (8 + 2 Punkte) Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 2\pi), \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie alle Lösungen u des Randwertproblems der Form $u(x, t) = v(x)w(t)$.
b) Lösen Sie das obige Randwertproblem mit der zusätzlichen Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{3x}{4}\right), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse finden Sie ab **21.04.2016** unter <http://www.math.kit.edu/iana1/>. Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **28.04.2016**, von 16 bis 18 Uhr im Hörsaal am Fasengarten (Geb.50.35) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **02.05.2016** bis **06.05.2016**.