Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

SS 2015
17.09.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Bachelor-Modulprüfung

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1:

(a) Die gegebene Differentialgleichung eine Riccati-Differentialgleichung mit $g(x) = 2e^x, h(x) = -1, k(x) = e^{2x} + e^x$. Durch die Substitution $u = y - \phi$ erhalten wir eine Bernoulli-Differentialgleichung (mit $\alpha = 2$) für u. Die weitere Substitution $z = u^{-1}$ führt auf die lineare Differentialgleichung

$$z' - (\underbrace{2e^x}_{=g(x)} + 2\underbrace{e^x}_{=\phi(x)}\underbrace{(-1)}_{=h(x)})z - \underbrace{(-1)}_{=h(x)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z' + 1 = 0.$$

Die Lösung dieser linearen Gleichung ist $z = -x + C$. Folglich $u = z^{-1} = \frac{1}{C-x}$ (definiert für $x \neq C$). Die übrige Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist also

$$y(x) = u(x) + \phi(x) = \frac{1}{C - x} + e^x.$$

Wir bestimmen die Konstante C mit Hilfe des Anfangswerts:

$$y(0) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{C} = 1 \quad \Rightarrow C = 1,$$

d.h.

$$y(x) = \frac{1}{1 - x} + e^x \quad (x \neq 1).$$

(b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom p lautet

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$$

Die Gleichung $p(\lambda)) = 0$ hat eine 3-fache Nullstelle $\lambda = 1$. Damit bilden

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x \quad \text{und} \quad y_3(x) = x^2e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem für die gegebene Differentialgleichung.
Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist e^x, d.h. $m = 0, \sigma = 1, \omega = 0$ (siehe Vorlesungsskript, Abschnitt 22.11) . Da $\sigma + i\omega = 1$ eine 3-fache Nullstelle von p ist, machen wir den folgenden Ansatz für die spezielle Lösung y_p:

$$y_p(x) = ax^3e^x, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\underbrace{ae^x(x^3+9x^2+18x+6)}_{=y_p'''(x)} -3\underbrace{ae^x(x^3+6x^2+6x)}_{=y_p''(x)} +4\underbrace{ae^x(x^3+3x^2)}_{=y_p'(x)} +ax^3e^x = e^x$$
$$\iff 6ae^x = e^x.$$

Koeffizientenvergleich führt auf $a = \frac{1}{6}$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Aufgabe 2:

(a) Der Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

führt auf

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1}}_{=xy''(x)} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n}_{=x^2y''(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n nx^{n-1}}_{=2y'(x)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n nx^n}_{=2xy'(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n}_{=2y(x)} = 0,$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1}}_{\overset{m=n-1}{=}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m+1}(m+1)mx^m} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n nx^{n-1}}_{\overset{m=n-1}{=}\sum_{m=0}^{\infty} 2a_{m+1}(m+1)x^m} - \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n nx^n + 2a_n x^n = 0,$$

$$2(a_0+a_1) + 6a_2x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[(n+2)(n+1)a_{m+1} - a_n(n+2)(n-1)\Big]x^n = 0.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_0, \\ a_2 &= 0, \\ a_{n+1} &= \frac{n-1}{n+1}a_n, \quad n \geq 2 \quad \overset{a_2=0}{\Longrightarrow} \quad a_n = 0 \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Folglich

$$y(x) = a_0(1-x).$$

(b) Um die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz (Verfahren von d'Alembert) $y(x) = v(x)\phi(x)$. Nach der Vorlesung gilt für v die folgende Differentialgleichung:

$$v''(x) + v'(x)\left(\frac{2\cdot 2}{2x} - \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \overset{z=v'}{\iff} \quad z'(x) + \frac{1}{x}z(x) = 1.$$

Die Lösung diesere linearen Gleichung ist

$$z(x) = C_1e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} + e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\int^x e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\cdot 1\mathrm{d}x = \frac{C_1}{x} + \frac{x}{2}.$$

Folglich

$$\begin{aligned} v(x) &= \int z(x)\mathrm{d}x = C_1 \ln x + \frac{x^2}{4} + C_2, \\ y_2(x) &= v(x)\phi(x) = 2C_1 x \ln x + \frac{x^3}{2} + 2C_2 x \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} y(x) &= C_3\phi(x) + y_2(x) = 2C_3 x + 2C_1 x \ln x + \frac{x^3}{2} + 2C_2 x \\ &= C_4 x + C_5 x \ln x + \frac{x^3}{2}, \end{aligned}$$

wobei $C_4 = 2C_2 + 2C_3$ und $C_5 = 2C_1$.

Aufgabe 3: Das gegebene Anfangswertproblem ist

$$\vec{y'}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) + 4(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-3)^2,$$

d.h. die Eigenwerte von A sind 2 (einfach) und 3 (doppelt).
Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

verwenden wir die folgenden Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to 3Z_3; Z_2 \to Z_2 + Z_3/3]{Z_2 \to Z_2/3; Z_3 \to Z_3 - 4Z_2;} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(2) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

d.h. ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Nun zur Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert 3.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 4Z_2]{Z_1 \to -Z_1; Z_2 \to Z_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen mit Hilfe des (-1)-Ergäanzungstricks, dass

$$E_A(3) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

d.h. ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist durch $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ gegeben. Ein Hauptvektor zum Eigenwert 3 ist $\vec{w} = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ mit

$$(A-3I)\vec{w} = \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad w_1 = 0 \quad \text{und} \quad 2w_2 - w_3 = 1,$$

d.h. w ist z. B. $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Es gilt

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}}_{=:S}\underbrace{\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}}_{=:D}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}}_{=S^{-1}}$$

und folglich

$$\begin{aligned}e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^{3t}&te^{3t}\\0&0&e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^{2t}&0&0\\0&(1+2t)e^{3t}&-te^{3t}\\0&4te^{3t}&(1-2t)e^{3t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Mit Variation der Konstanten erhält man

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) &= e^{tA}\vec{y}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds\\ &= \begin{pmatrix}e^{2t}&0&0\\0&(1+2t)e^{3t}&-te^{3t}\\0&4te^{3t}&(1-2t)e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\\ &\quad + \int_0^t \begin{pmatrix}e^{2(t-s)}&0&0\\0&(1+2(t-s))e^{3(t-s)}&-(t-s)e^{3(t-s)}\\0&4(t-s)e^{3(t-s)}&(1-2(t-s))e^{3(t-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2s}\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}s\\ &= \begin{pmatrix}2e^{2t}\\(1+2t)e^{3t}\\4te^{3t}\end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix}2t\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}s = \begin{pmatrix}(2+t)e^{2t}\\(1+2t)e^{3t}\\4te^{3t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

(a) Die gegebene Differentialgleichung ist zu

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{pmatrix}2xt\\1\end{pmatrix}}_{=\vec{a}\left((x,t),u\right)}\cdot\nabla u(x,t) &= \underbrace{u(x,t)}_{=b\left((x,t),u\right)},\\ u(x,0) &= \underbrace{x}_{=f(x)}\end{aligned}$$

äquivalent. Zur Parametrisierung der x-Achse verwenden wir den reellen Parameter ξ, hier ist $\Gamma = \{(\xi,0) : \xi \in \mathbb{R}\}$. Das charakteristische System und die Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned}\vec{k}'(s) &= \vec{a}\big(\vec{k}(s),\omega(s)\big) = \begin{pmatrix}2k_1(s)k_2(s)\\1\end{pmatrix} \qquad & \vec{k}(0) &= \begin{pmatrix}\xi\\0\end{pmatrix}\\ \omega'(s) &= b\big(\vec{k}(s),\omega(s)\big) = \omega(s) & \omega(0) &= f(\xi) = \xi\end{aligned}$$

mit Lösung

$$\begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \\ \omega(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e^{s^2} \\ s \\ \xi e^{s} \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad s = t, \quad \xi = x e^{-t^2}$$

und somit ist

$$u(x,t) = \omega(t, xe^{-t^2}) = xe^{t-t^2}.$$

(b) Mit dem Ansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$ wird die gegebene Differentialgleichung zu

$$2xtf'(x)g(t) + f(x)g(t) = f(x)g(t)$$

und die ist zu

$$\frac{2xf'(x)}{f(x)} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{g'(t)}{g(t)}\right)$$

äquivalent. Da die linke Seite nur von x und die rechte nur von t abhängt, beide Seiten aber für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ übereinstimmen, hängen beide Ausdrucke weder von x noch von t ab. Also existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{2xf'(x)}{f(x)} = \lambda = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{g'(t)}{g(t)}\right).$$

Daraus ergeben sich die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\lambda}{2x} f(x), \\ g'(t) &= (1 - \lambda t) g(t) \end{aligned}$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1 x^{\frac{\lambda}{2}}, \\ g(t) &= C_2 e^{t - \frac{\lambda}{2} t^2}. \end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung folgt

$$u(x,0) = f(x)g(0) = C_1 C_2 x^{\frac{\lambda}{2}} \overset{!}{=} x \quad \Longleftrightarrow \quad C_1 C_2 = 1, \quad \lambda = 2.$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = f(x)g(t) = xe^{t-t^2}.$$